

บุญส่ง สมุทรประภูต
วิชัย พัฒนพล

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีมหานคร
หนองจอก กรุงเทพฯ 10530

การศึกษาการไหลเวียนระหว่างแหล่งไหลเข้า (Sink) และแหล่งไหลออก (Source)

A Study of Flow between Sink and Source

บทความนี้ได้นำเสนอการจำลองแบบการไหลเวียนของของไหลเพื่อนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาในงานที่เกี่ยวข้องกับการไหลเวียนของของไหล ซึ่งประกอบไปด้วยแหล่งไหลเข้า(Sink) และแหล่งไหลออก(Source) ภายในกรอบสี่เหลี่ยม 2 มิติ โดยใช้โปรแกรม PDEase Version 2.4 ของบริษัท Macsyma Inc. เป็นเครื่องมือในการหาคำผลลัพธ์ ในบทความได้นำเสนอตัวแปร ความแปรปรวนสัมพัทธ์(Relative variance) ซึ่งใช้วัดค่าความสม่ำเสมอของการไหล จากผลการวิเคราะห์พบว่าหากระยะระหว่างแหล่งไหลเข้าแหล่งไหลออกมีค่ามาก จะทำให้การกระจายของการไหลมีความสม่ำเสมอมากขึ้นตาม

This paper represents a study of fluid circulation modeling for a problems of sink and a source within 2 dimensional rectangular frame . The problem is analyzed using the PDEase software, version 2.4 by Macsyma Inc.,A new dimensionless variable "Relative Variance" is used as to measure the uniformity of flow varies proportionally with the distance between the sink and the source.

1. บทนำ

ปัญหาหลายอย่างที่เราพบเห็นทั่วไป เกี่ยวข้องกับการไหลของของเหลวในบริเวณที่กำหนด โดยมีแหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออกชัดเจน ยกตัวอย่างกรณีการปลูกพืชโดยใช้น้ำในภาชนะซึ่งมีน้ำไหลเข้านำสารอาหารให้ราก และน้ำไหลออกเพื่อรักษาระดับน้ำ จำเป็นจะต้องทำให้น้ำเกิดการกระจายของการไหลอย่างสม่ำเสมอ เพื่อที่จะนำ สารอาหาร และแร่ธาตุ ไปยังที่ต่างๆ อย่างทั่วถึง ซึ่งสามารถจำลองแบบทางทฤษฎีสำหรับปัญหารูปแบบนี้ เป็นการไหลระหว่างแหล่งไหลเข้า(Source)และแหล่งไหลออก(Sink) และจำเป็นที่ต้องหาตัวแปร(Parameter) ที่จะวัดการกระจายนี้

2. สมการการเคลื่อนที่

พิจารณาการเคลื่อนที่ใน 2 มิติของของไหลที่ไม่มี

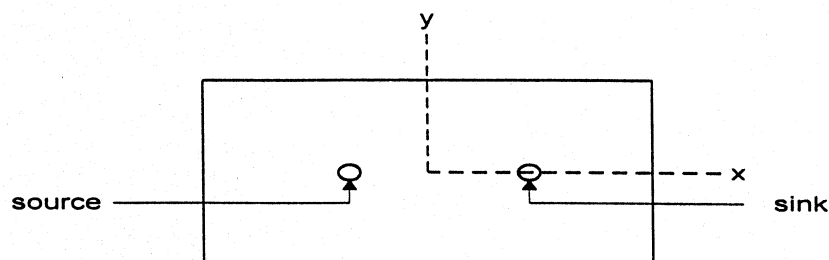
ความหนืด(Inviscid) ,ไม่ยุบตัว(Incompressible),ไม่มีการหมุน(Irrotational) ภายในกรอบสี่เหลี่ยม ดังแสดงในรูปที่ 1
สมการการไหลสามารถเขียนได้ดังรูป(Papanas- tasiou)

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (1)$$

เมื่อ ψ คือ สตรีม ฟังก์ชัน (Stream function) สองมิติในระนาบ x-y ซึ่งมีความสัมพันธ์ กับความเร็วในแนวแกน x และ y คือ

$$v_x = \partial \psi / \partial y \quad (2)$$

$$v_y = -\partial \psi / \partial x \quad (3)$$



รูปที่ 1 ลักษณะทางกายภาพของปัญหาที่พิจารณา

แม้ว่าสมการที่(1)จะมีการศึกษามานานแล้ว แต่ในปัจจุบันสามารถแก้ปัญหาได้สะดวกขึ้นโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Method) โดยเฉพาะอย่างยิ่งโปรแกรม PDEase (Masyma Inc.) ซึ่งเป็นโปรแกรมที่มีขั้นตอนการแก้ปัญหาตามวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

สำหรับการไหลในกรอบสี่เหลี่ยมที่พิจารณา เนื่องจากปัญหาที่มีความสมมาตรดังนั้นสามารถเลือกพิจารณาเพียงครึ่งบนหรือครึ่งล่างเพียงครึ่งเดียว

เนื่องจากแหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออกในทางทฤษฎีเป็นเพียงจุด ดังนั้นจะจำลองให้เป็นวงกลมขนาดเล็กที่มีของเหลวไหลเข้าหรือออกอย่างสม่ำเสมอรอบเส้นรอบวง และเนื่องจากอัตราการไหลระหว่างสตรีมไลน์ (Stream Line) 2 เส้น คือ ค่าความแตกต่างระหว่างค่าของสตรีมฟังก์ชัน (Stream Function) จึงสามารถกำหนดกรอบของปัญหาได้ดังรูปที่ 2 เมื่อ

Ψ เท่ากับ 0 บนขอบเขต A-B-C-D-E-F

Ψ เพิ่มขึ้นจาก 0 จนถึงครึ่งหนึ่งของอัตราการไหล

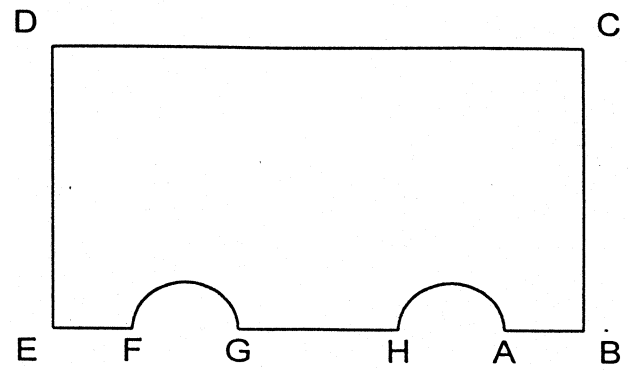
บนขอบเขต F-G

Ψ เท่ากับครึ่งหนึ่งของอัตราการไหลบนขอบเขต

G-H

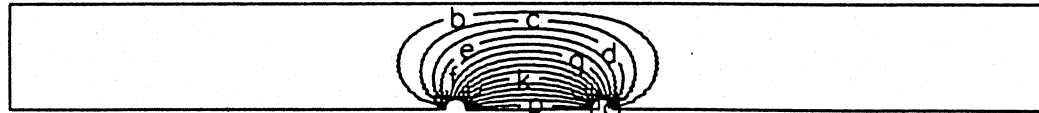
Ψ ลดลงจากครึ่งหนึ่งของอัตราการไหล จนถึง 0 บน

ขอบเขต H-A

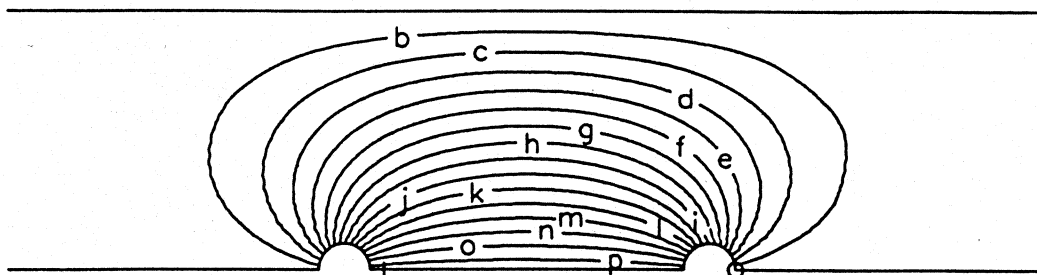


รูปที่ 2 แสดงกรอบปัญหาที่ใช้พิจารณา

ลักษณะของสตรีมไลน์ และการกระจายตัวของความเร็ว (Velocity distribution) ในกรณีที่ตั้งาแหน่งของแหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออก มีการเปลี่ยนแปลง แสดงดังรูปที่ 3, 4 และ 5 โดยที่รูปที่ 3 แสดงการไหลเมื่อ แหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออกอยู่ใกล้กันขณะที่รูปที่ 4 แสดงการไหลเมื่อแหล่งอยู่ไกลจากกัน จะเห็นได้ว่า ในกรณีรูปที่ 3 ของเหลวจะกระจุกตัวอยู่บริเวณ ระหว่างแหล่งทั้งสอง และบริเวณส่วนใหญ่จะมีการไหลย้อน ในขณะที่รูปที่ 4 แสดงการไหลที่ค่อนข้างจะกระจายทั่วบริเวณ



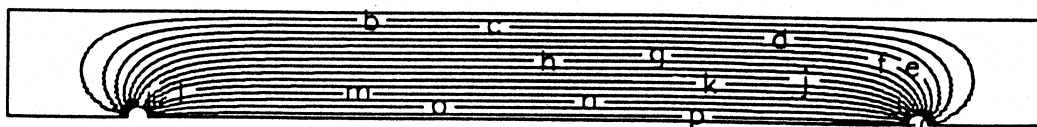
รูปที่ 3ก.



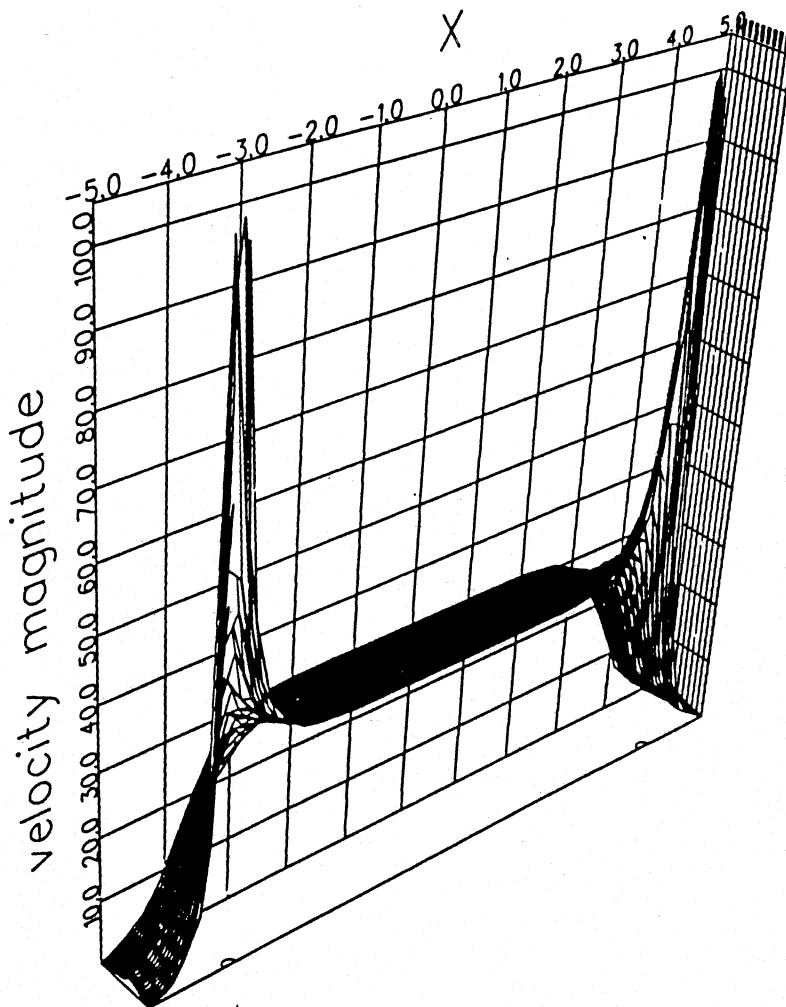
รูปที่ 3ข.

รูปที่ 3 ก. สตรีมไลน์ในกรณีที่ตั้งาแหน่งของแหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออก

ข. รูปขยาย รูปที่ 3 ก.



รูปที่ 4 สตรีมไลน์ในกรณีที่ตั้งาแหน่งของแหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออกไกลห่างจากกัน



รูปที่ 5 การกระจายตัวของความเร็ว ณ ตำแหน่งต่างๆ

จากผลที่ได้สามารถหาอัตราเร็วที่จุดต่างๆโดยใช้สมการ

$$v = (v_x^2 + v_y^2)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

และคำนวณอัตราเร็วเฉลี่ยโดย

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \int v dA \quad (6)$$

เมื่อทำการอินทิเกรตกระทำบนบริเวณที่มีการไหลทั้งหมดคือกรอบสี่เหลี่ยมในรูปที่ 2

ในทางสถิติหากต้องการทราบค่าความแปรปรวนของข้อมูลจะใช้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation) หรือค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน (Coefficient of Variations) ในการวัดโดยมีค่าจำกัดความตามลำดับดังนี้

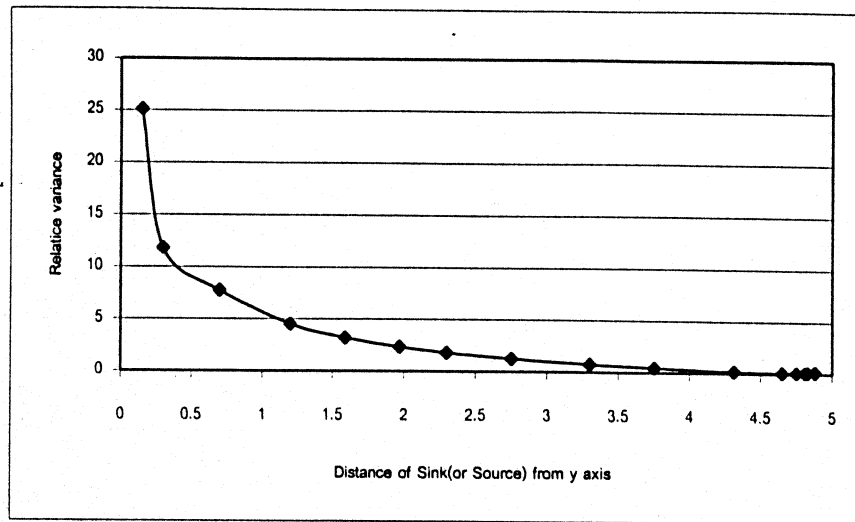
$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (7)$$

$$c = s/\bar{x} \times 100 \quad (8)$$

ในบทความนี้จะนำแนวความคิดในการวัดการกระจายตัวของข้อมูลทางสถิติดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ในการวัดการกระจายตัวของเหลว โดยตัวแปรที่น่าเสนอนี้จะมีรูปแบบการคล้ายคลึงกับค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวน แต่จะไม่พิจารณาในเชิงสถิติเนื่องจากข้อมูลที่ได้ในบทความนี้ มาจากสมการที่ให้ค่าผลลัพธ์ที่แน่นอน ค่าความแปรปรวนมาตรฐาน และค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรปรวนในทางสถิติได้แสดงไว้ในสมการที่ 7 และ 8 ตามลำดับ

เพื่อวัดความสม่ำเสมอของการไหล เรายานเสนอค่าจำกัดความของตัวแปร σ ซึ่งเราจะเรียกว่าความแปรปรวนสัมพัทธ์ (Relative Variance) ดังต่อไปนี้

$$\sigma = \frac{1}{A} \int [(v/\bar{v}) - 1]^2 dA \quad (9)$$



รูปที่ 6 แสดงค่าความแปรปรวนสัมพัทธ์ในกรณีที่ ระยะระหว่างแหล่งไหลออกและแหล่งไหลเข้าเปลี่ยนแปลงเป็นระยะทางเท่ากัน

หากค่า σ มีค่ามาก อัตราเร็ว ณ จุดต่างๆ จะมีความแตกต่างกันมาก นั่นหมายถึง ของไหลจะมีการกระจายตัวน้อย ในทางกลับกัน ถ้าค่า σ มีค่าน้อย ของไหลก็จะมีการกระจายตัวมาก ค่า σ ในรูปที่ 3 คือ 7.737 ขณะที่ในรูปที่ 4 คือ 0.451

ในปัญหาซึ่งต้องการให้การไหลมีการกระจายตัวอย่างสม่ำเสมอ σ ควรจะมีค่าน้อย ดังนั้นอาจใช้เป็นเครื่องมือในการหาตำแหน่งในการติดตั้งแหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออกที่เหมาะสมในการออกแบบได้

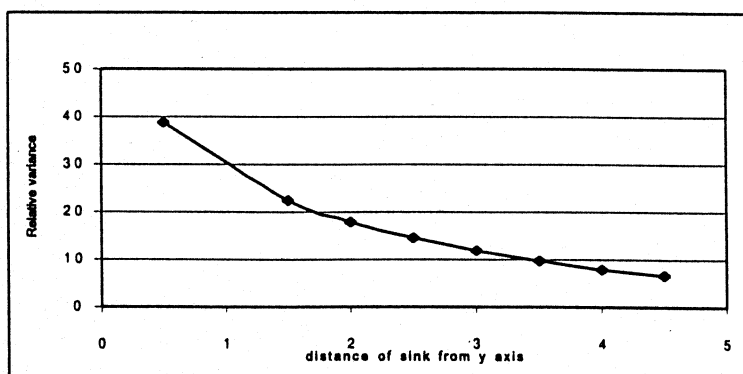
3.ผลการวิเคราะห์

บทความนี้จะพิจารณาปัญหาใน 2 รูปแบบ รูปแบบที่หนึ่งระยะห่างระหว่างแหล่งไหลเข้า(Source) และแหล่งไหลออก(Sink) จะเปลี่ยนแปลงไปเป็นระยะต่างๆ เท่าๆกันเมื่อวัดจากแกน y ดังรูปที่ 1 รูปแบบที่สอง

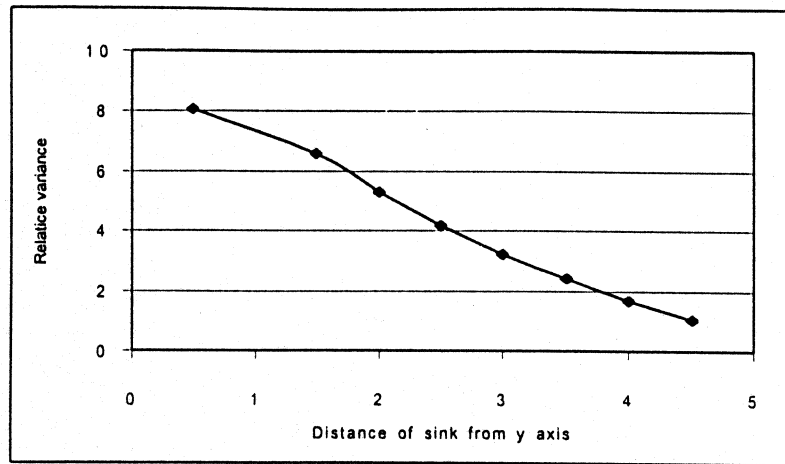
แหล่งไหลเข้า(หรือ แหล่งไหลออก) จะถูกยึดตำแหน่งไว้และเปลี่ยนที่ตั้งของ แหล่งไหลออก(หรือแหล่งไหลเข้า)

จากรูปที่ 6 จะพบว่ากรณีที่แหล่งไหลเข้าและแหล่งไหลออกมีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งห่างจากแกน y เป็นระยะทางเท่ากัน ความแปรปรวนสัมพัทธ์ (Relative variance) จะมีค่าน้อยลงเมื่อระยะระหว่าง แหล่งไหลเข้า และแหล่งไหลออกมีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ ดังนั้น ในการออกแบบควรจะต้องเลือกแหล่งทั้งสองให้อยู่ห่างจากกัน

ปัญหาอีกรูปแบบหนึ่งคือกรณีที่ยึดตำแหน่งของแหล่งไหลเข้าให้คงที่ และเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของแหล่งไหลออกที่ระยะต่างๆ พบว่าได้ผลการคำนวณมีลักษณะคล้ายคลึงกับกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของแหล่งไหลเข้า และแหล่งไหลออกแบบสมมาตร สามารถแสดงผลการวิเคราะห์ดังรูปที่ 7 และรูปที่ 8



รูปที่ 7 แสดงค่าความแปรปรวนสัมพัทธ์ในกรณีที่ยึดตำแหน่งของแหล่งไหลออกไว้ที่ 0.9 หน่วย และเปลี่ยนตำแหน่งแหล่งไหลเข้า



รูปที่ 8 แสดงค่าความแปรปรวนสัมพัทธ์ในกรณีที่ยึดตำแหน่งของแหล่งไหลออกไว้ที่ 3 หน่วย และเปลี่ยนตำแหน่งแหล่งไหลเข้า

4. บทสรุป

ในบทความได้เสนอตัวแปรที่เรียกว่าความแปรปรวนสัมพัทธ์ (σ) เพื่อวัดความสม่ำเสมอของการไหล ปัญหาที่มีแหล่งไหลเข้า และแหล่งไหลออก ไม่ได้มีเพียงกรณีที่พิจารณาในบทความเท่านั้น แต่ยังมีปัญหาทำนองนี้อีกเช่น การไหลเวียนของอากาศภายในห้อง ซึ่งต้องหาตำแหน่งในการติดตั้ง

เครื่องปรับอากาศ (แหล่งไหลเข้า) และบริเวณที่ดูดอากาศไหลออกจากห้อง(แหล่งไหลออก) เพื่อให้ได้ประสิทธิภาพในการทำงานสูงสุด ซึ่งอาจจะใช้ ค่าความแปรปรวนสัมพัทธ์ (σ) นี้ เป็นเครื่องมือช่วยในการออกแบบและคำนวณได้ในอนาคต

เอกสารอ้างอิง

1. Tosos C.Papanastasiou, 1994,"Applied Fluid Mechanics", Prentice Hall , pp 336-338.
2. Franke M.White , 1994 , " Fluid Mechanics", McGraw-Hill book Co.,pp. 215-222.
3. Sir Ronald and A. Fisher,1973, " Statistical Methods Experimental Design and Scientific Inference " ,Oxford Science Publications. pp. 250-255.
4. John Neter , William Wasserman, G.A.Whitmore, 1988,"Applied Statics", Allyn and Bacon,Inc., pp. 70-78