

ข้าพเจ้าชื่อ	นายมงคล มงคลวงศ์โรจน์
ตำแหน่ง	อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
ผู้ร่วมเสนอบทความ	นายพรศักดิ์ อรรถวานิช
ตำแหน่ง	อาจารย์ประจำภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
สถานที่ทำงาน	ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
	คณะวิศวกรรมศาสตร์
	สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า
	เจ้าคุณทหารลาดกระบัง
	กรุงเทพฯ 10520
ชื่อบทความ	การออกแบบเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบร์ริงด้วยไมโครคอมพิวเตอร์

บทคัดย่อ

บทความนี้ได้แสดงการทำนายสมรรถนะของแบร์ริงเพลากลมที่มีพฤติกรรมแบบเทอร์โมไฮโดรไดนามิกด้วยไมโครคอมพิวเตอร์ โปรแกรมที่เขียนขึ้นเป็นภาษาเบสิก ใส่ข้อมูลอินพุต พร้อมกำหนดชนิดและอุณหภูมิของน้ำมันหล่อลื่นที่ไหลเข้าแบร์ริง แล้ว โปรแกรมจะคำนวณค่าอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นโดยวิธี อีเตอร์เรชัน

โปรแกรมที่พัฒนาขึ้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการเรียน การสอนในวิชาการหล่อลื่น ช่วยให้ผู้ใช้โปรแกรมสามารถเลือก และออกแบบแบร์ริง สำหรับงานสำคัญ ได้ถูกต้องยิ่งขึ้น

Abstract

This paper describes a design procedure for predicting the performance of thermohydrodynamic bearings. The Microcomputer program is developed using Iteration technique to perform calculations from the basic input parameters.

The program is simple to implement for both education and selecting the bearings parameters under critical applications.

บทนำ

ทฤษฎีไฮโดรไดนามิกของนายเรโนส์ได้กำหนดข้อสมมติว่า น้ำมันหล่อลื่นมีค่าความหนืดคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามอุณหภูมิ ซึ่งเป็นผลทำให้ง่ายต่อการคำนวณ ดังนั้นจึงมีผู้นิยมใช้ทฤษฎีดังกล่าว ในการออกแบบแบริ่งอย่างแพร่หลาย แต่จะให้ค่าผิดพลาดไปบ้าง ทั้งนี้เพราะความร้อนที่เกิดขึ้นในชั้นของน้ำมันหล่อลื่น เนื่องจากแรงเสียดทานจะทำให้อุณหภูมิของน้ำมันหล่อลื่นเพิ่มขึ้น และอุณหภูมิจะกระจายไปตามตำแหน่งต่าง ๆ แบบสามมิติในแบริ่ง

อย่างไรก็ตามจากผลการทดลองแบริ่งจำนวนมาก เปรียบเทียบกับผลการคำนวณ โดยใช้ทฤษฎีไฮโดรไดนามิก พบว่าค่าความสามารถในการรับภาระ และอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นในน้ำมันหล่อลื่นของแบริ่ง มีค่าแตกต่างกันมาก ในปี ค.ศ. 1929 McKee and McKee ได้ทำการทดลองพบว่า ภาระที่สามารถรับได้และอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นของน้ำมันหล่อลื่นในแบริ่งมีค่าแตกต่างจากค่าที่คำนวณได้จากทฤษฎีไฮโดรไดนามิกอย่างเห็นได้ชัดโดยเฉพาะอย่างยิ่งสภาพที่เสลาหมุนด้วยความเร็วรอบสูง ความหนืดของน้ำมันหล่อลื่นจะมีค่าต่ำลงจนกระทั่งผลคูณของค่าความหนืดและความเร็วรอบมีค่าคงที่ปี ค.ศ. 1973 ถึง 1982 Professor Seireg, A. ได้ทำการทดลองและศึกษาเพื่อหาพฤติกรรมของชั้นน้ำมันหล่อลื่นในเทอร์โมไดนามิกแบริ่งพบว่า

1. จากผลการทดลองพบว่าจะมีสภาพการทำงานของแบริ่งสภาวะหนึ่ง (จุดหนึ่ง) ที่ทฤษฎีไฮโดรไดนามิกสามารถทำนายได้อย่างถูกต้อง เรียกสภาวะนี้ว่า สภาพสมดุลย์เทอร์โมไฮโดรไดนามิก (Thermohydrodynamic Equilibrium) หรือ O^* Condition
2. ได้แสดงความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ระหว่าง O^* Condition และสภาพการทำงานอื่น ๆ ของแบริ่งแบบเทอร์โมไฮโดรไดนามิก ดังแสดงในรูป 1 เป็นดังนี้

$$\frac{P_a}{P_a^*} = \sqrt{\frac{N}{N^*}} \quad \dots\dots(1)$$

โดยที่ P_a เป็นความดันโดยเฉลี่ยที่ความเร็วรอบของเพลากับ N และ P_a^* เป็นความดันโดยเฉลี่ยที่ O^* Condition ที่ความเร็วรอบของเพลากับ N^*

3. ได้พบว่าที่ O^* Condition จากรูป 2 ค่าความชัน

$$\tan \beta = \frac{dP}{dV} = -\frac{V}{K} \quad \dots\dots(2)$$

โดยที่ V คือ ปริมาณน้ำมันที่ไหลเข้าแบริ่ง และ K เป็นค่าคงที่ (Bearing

Characteristic Constant) ซึ่งได้จากการทดลอง

4. จากผลการทดลองได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่า (R/C) และค่าคงที่ K ดังแสดงในรูป 3 สำหรับบทความนี้ สมมติว่า ความสัมพันธ์ระหว่าง ค่า (R/C) และค่าคงที่ K เป็นเส้นตรง

5. จากทฤษฎีไฮโดรไดนามิกได้กำหนด Sommerfeld number, S ที่สภาวะการทำงานของแบริ่ง เป็นตัวทำนายสมรรถนะของแบริ่งเป็นดังนี้

$$S = \frac{\mu_a N}{P_a} \left(\frac{R}{C} \right)^2 \quad \dots\dots (3)$$

โดยที่ μ_a = ค่าความหนืดโดยเฉลี่ยของน้ำมันหล่อลื่น

P_a = ภาระโดยเฉลี่ยที่แบริ่งรับ

N = ความเร็วรอบของเพลลา

R = รัศมีของเพลลา

C = ระยะ Clearance ระหว่างเพลลาและแบริ่ง

สำหรับเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบริ่ง จะใช้ Modified Sommerfeld number, S^* ที่สภาวะการทำงานของแบริ่งเป็นตัวทำนายสมรรถนะของเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบริ่ง เป็นดังนี้

$$S^* = \frac{\mu N}{P_a^2} \left\{ \left(\frac{R}{C} \right)^2 (P_a^*) \right\} \quad \dots\dots (4)$$

และ $P_a^* = \left(\frac{Q}{RNCL} \right) \left(\frac{RCL}{K} \right) / \left[\frac{b^4}{(T_a + \theta)^2} \left(\frac{1}{\theta} \right) \right] \quad \dots\dots (5)$

และ $\mu = \mu_o \text{Exp.} \left[\frac{b}{T + \theta} \right] \quad \dots\dots (6)$

โดยที่ μ = ค่าความหนืดของน้ำมันหล่อลื่นที่อุณหภูมิ θ °

N = ความเร็วรอบของเพลลา

R = รัศมีของเพลลา

C = ระยะ Clearance ระหว่างเพลลาและแบริ่ง

Q = อัตราการไหลของน้ำมันหล่อลื่นในแบริ่ง

L = ความยาวของแบริ่ง

K = Bearing Characteristic constant

$$a = 95^\circ\text{F}$$

$$b = \text{ค่าคงที่ได้จากตาราง 1}$$

$$\mu_o = \text{ค่าความหนืดของน้ำมันหล่อลื่น ตามตารางที่ 1}$$

การออกแบบเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบบวิ่ง

ขั้นตอนในการวิเคราะห์ทำนายสมรรถนะเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบบวิ่งเป็นดังนี้

1) สร้างสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง (R/C) และ K ตามรูป 4 เพื่อหาค่า Bearing Characteristic constant K จะได้สมการเป็นดังนี้

$$K = \text{Exp}[(0.4343 \log(\frac{R}{C}) - 1.9575)/(-0.1132)] \quad \dots\dots(7)$$

แล้วคำนวณค่า RCL/K และค่า $\frac{N}{P_a^2}(\frac{R}{C})^2$

2) สมมติค่าอุณหภูมิและความดันโดยเฉลี่ยที่ O^* Condition T_a^* และ P_a^* โดยใช้ค่าเริ่มต้นเพื่ออุณหภูมิของน้ำมันหล่อลื่นเข้าแบร์ริง และความดันโดยเฉลี่ย

3) คำนวณหาค่าความหนืดของน้ำมันหล่อลื่นโดยเฉลี่ยจาก

$$\mu = \mu_o \cdot \text{Exp}\left(\frac{b}{T_a^* + \mu}\right)$$

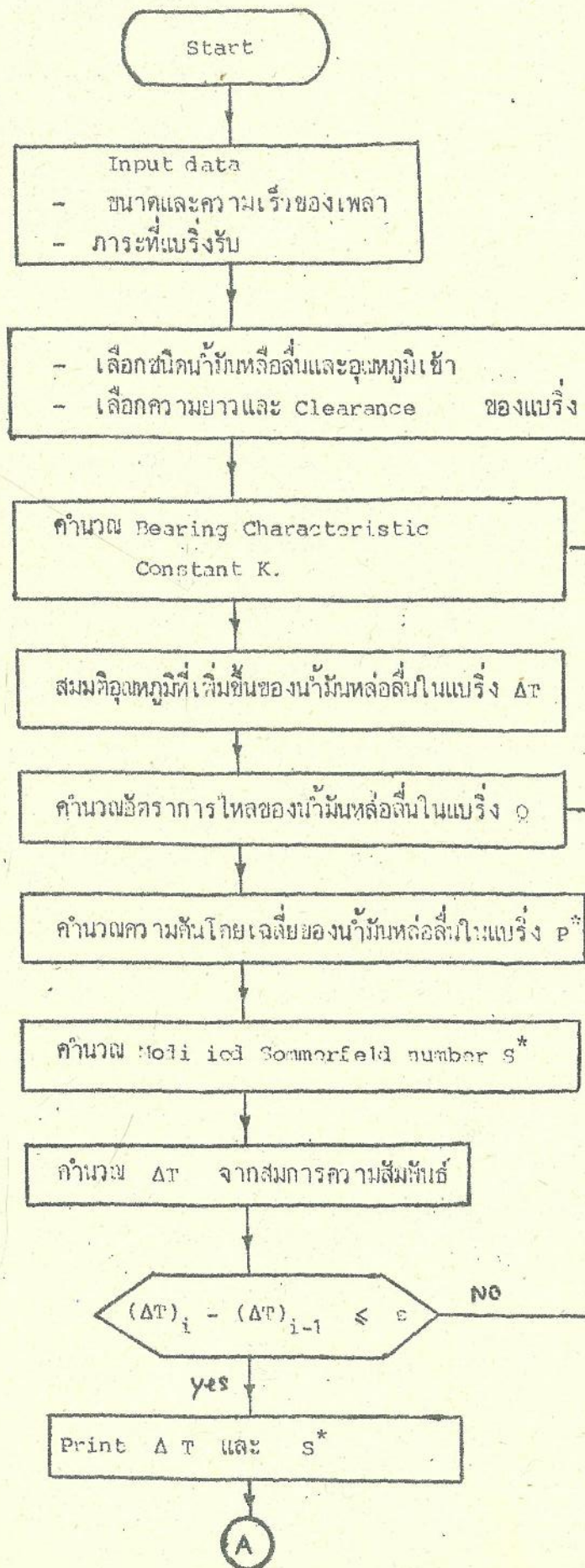
4) คำนวณค่า Modified Sommerfeld number S^*

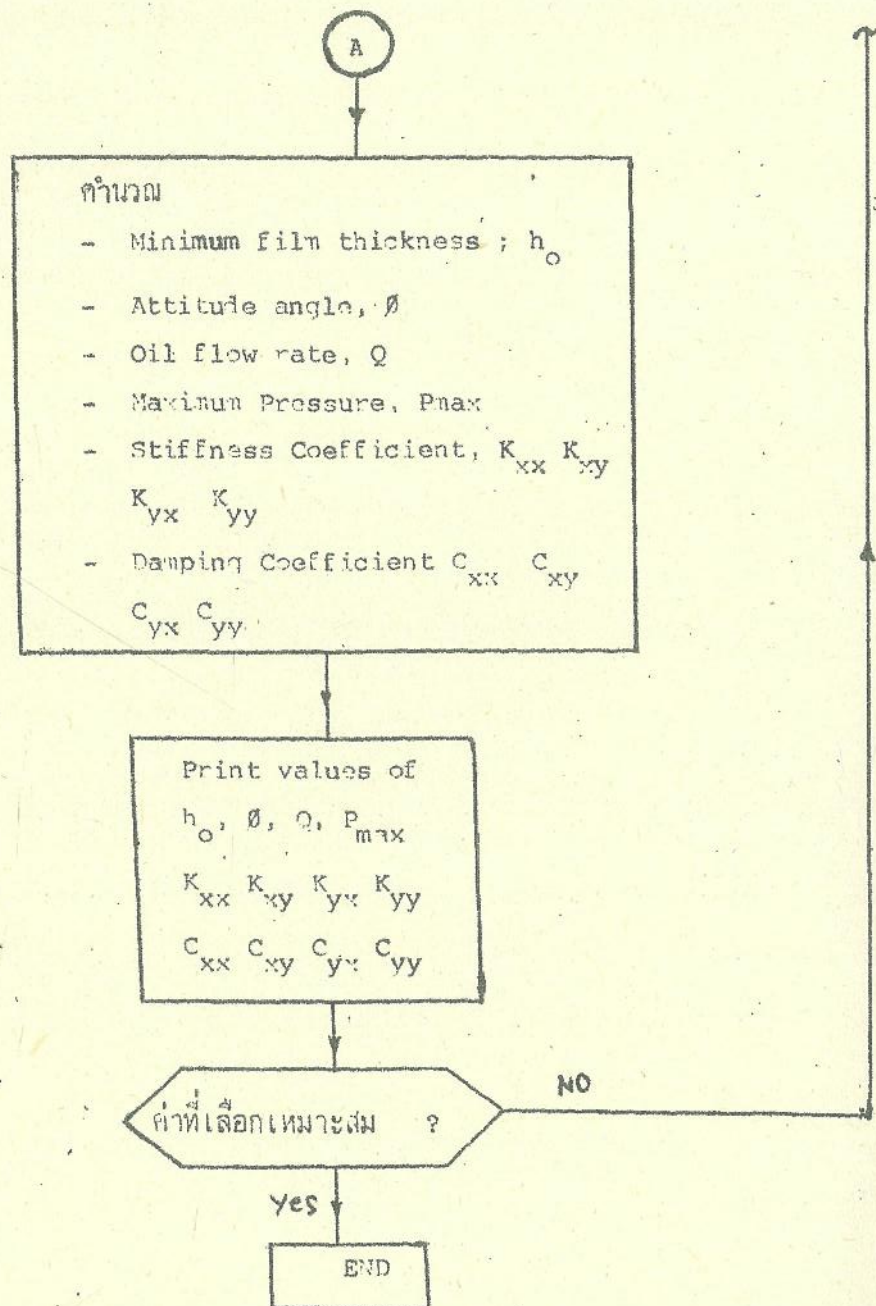
$$S^* = \frac{\mu N}{P_a^2} \left(\frac{R}{C}\right)^2 (P_a^*)$$

5) คำนวณหาอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น ΔT โดยวิธี Iteration จนกระทั่ง $(\Delta T)_i - (\Delta T)_{i-1} < \epsilon$ ϵ คือค่าผิดพลาดที่ยอมรับให้เกิดขึ้นได้, $\epsilon < 0.5^\circ\text{F}$

6) การคำนวณ Dependent Variables นั้นสามารถคำนวณได้จากสมการในภาคผนวก สำหรับเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบบวิ่งใช้ค่า Modified Sommerfeld number S^* แทนค่า Sommerfeld number S จากทฤษฎีไฮโดรไดนามิกแบบวิ่ง

รูป 4 แสดง Flow Chart สำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ในการออกแบบเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบบวิ่ง





รูป 4 Flow Chart

ผลการคำนวณเพอร์โวลไฮโดรไดนามิกส์

DATA INPUT

1.From table, please choose the oil ----> SAE 30
 2.Load of the journal <lbs> ----> 947
 3.Speed of shaft <rpm> ----> 4000
 4.Radius of shaft <in> ----> 0.6875
 5.Length of bearing <in> ----> 1.375
 6.Clearance between shaft and bearing <in> ----> 0.000915
 7.Inlet temperature <F> ----> 150

Iteration	DeltaT	Ta	Viscosity	S*	Q/RNCL	P	New DeltaT
1	0.0	150.0	0.00000364411	0.274	3.9	497	110.1
2	110.1	205.1	0.00000131486	0.098	4.4	850	93.7
3	93.7	196.9	0.00000149339	0.190	4.0	725	114.2
4	114.2	207.1	0.00000127560	0.139	4.4	851	112.8
5	112.8	206.4	0.00000128912	0.165	4.1	782	107.3
6	107.3	203.7	0.00000134346	0.158	4.1	770	101.4
7	101.4	200.7	0.00000140552	0.162	4.1	754	102.1
8	102.1	201.1	0.00000139825	0.158	4.1	757	100.0
9	100.0	200.0	0.00000142195	0.161	4.1	750	101.1
10	101.1	200.5	0.00000140969	0.159	4.1	754	99.9
11	99.9	200.0	0.00000142244	0.161	4.1	750	100.7
12	100.7	200.4	0.00000141319	0.159	4.1	753	100.0
13	100.0	200.0	0.00000142113	0.161	4.1	751	100.6
14	100.6	200.3	0.00000141486	0.159	4.1	753	100.1

PRESS <RETURN> TO CONTINUE.....

SOLUTION

*Modified Sommerfeld number = 0.15932210
 Min. film thickness <ins> = 0.00046234
 Attitude angle <rad> = 62.05041000
 Coefficient of friction = 0.00469519
 Oil flow rate <in³/s> = 0.23445520
 Temperature rise <F> = 100.12400000
 Max.pressure <psi> = 1560.35100000

PRESS <RETURN> TO CONTINUE.....

STIFFNESS COEFFICIENTS (K)

K'xx		=	2.135194
K'xy		=	3.257945
K'yx		=	2.070515
K'yy		=	2.072799

DAMPING COEFFICIENTS (C)

C'xx		=	5.723319
C'xy		=	1.867519
C'yx		=	1.970468
C'yy		=	3.00233

PRESS <RETURN> TO CONTINUE.....

Do you want to run again :(Y/N) ? n

Hydrodynamic Theory

: Oil	SAE 30
: Load of Journal	947 lbs.
: Speed of shaft	4,000 rpm
: radius of shaft	0.6875 in.
: Bearing Length	1.375 in.
: radial clearance	0.000915 in.
: Inlet Temperature	150 °F

Iteration	ΔT	T_a	Viscosity	S^*	New ΔT
1	0.0	150	3.6441×10^{-6}	0.274	110.1
2	110.1	205.1	1.307×10^{-6}	0.0983	55.24
3	55.24	177.6	2.0765×10^{-6}	0.1563	65.33
4	65.33	182.66	1.896×10^{-6}	0.14273	67.21
5	67.21	183.60	1.865×10^{-6}	0.1404	66.63
6	66.63	183.31	1.8744×10^{-6}	0.1411	66.80
7	66.80	183.4	1.8714×10^{-6}	0.1408	66.73
8	66.73	183.365	1.8726×10^{-6}	0.1409	66.77
9	66.73	183.385	1.8719×10^{-6}	0.1409	66.76

Sommerfeld number	=	0.1409	
Min film thickness	=	0.000409	นิ้ว
Attitude angle	=	54.4	rad
Coefficient of friction	=	4.437×10^{-3}	
Oil flow rate	=	0.253	ลูกบาศก์นิ้วต่อวินาที
Temperature rise	=	66.76 °F	
Max. pressure	=	1131.22 psi	

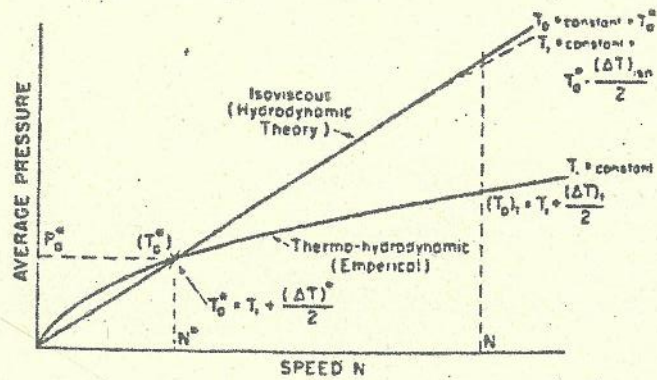
สรุป

การออกแบบเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบบเร่งด้วยไมโครคอมพิวเตอร์ โดยโปรแกรมที่เขียนขึ้นเป็นภาษาเบสิกสามารถใช้กับไมโครคอมพิวเตอร์ทั่ว ๆ ไปได้ ค่าอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น และค่า Modified Sommerfeld number สามารถคำนวณได้จากวิธี Iteration แล้วใช้ Modified Sommerfeld number แทน Sommerfeld number ในสมการความสัมพันธ์ของอุณหภูมิไฮโดรไดนามิกแบบเร่ง ดังแสดงในภาคผนวก

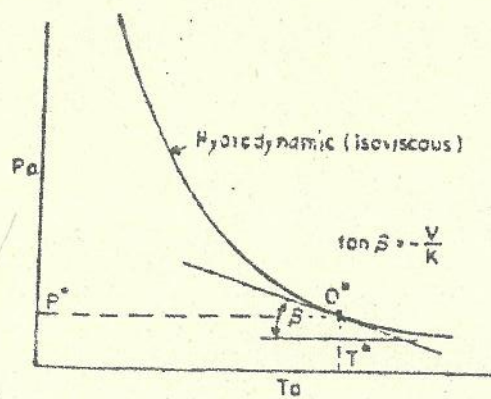
จากผลการคำนวณของเทอร์โมไฮโดรไดนามิกแบบเร่ง และไฮโดรไดนามิกแบบเร่งพบว่าค่าภาระที่สามารถรับได้ และค่าอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าแตกต่างกันค่อนข้างสูง ส่วนค่าตัวแปรอื่น ๆ จะได้ค่าใกล้เคียงกันมากซึ่งเป็นไปตามรายงานการวิจัยที่ได้ตีพิมพ์แล้ว โปรแกรมนี้จึงอาจจะมีประโยชน์ต่อการออกแบบแบบเร่งที่ใช้กับงานสำคัญ ๆ ได้เป็นอย่างดี

เอกสารอ้างอิง

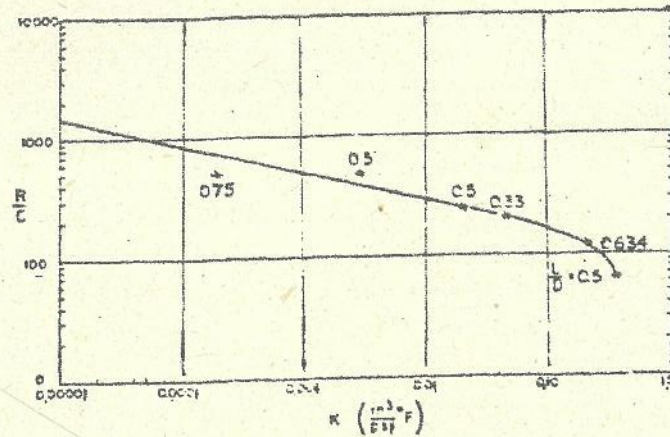
1. Seireg, A and Dandage, S., "Empirical Design Procedure for the Thermohydrodynamic Behavior of Journal Bearing", ASME Journal of Lubrication Technology Vol. 104, 1982.
2. Seireg, A and Ezzat, H., "Thermohydrodynamic Phenomena in Fluid film Lubrication", ASME Journal of Lubrication Technology Vol. 95, 1973.
3. Kim, W., K., Tanaka, M. and Hori, Y. "A Three-Dimensional Analysis of Thermohydrodynamic Performance of Sector-Shaped, Tilting-Pad Thrust bearings", ASME Journal of Lubrication Technology Vol. 105, 1983.



รูป 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันและความเร็วรอบ



รูป 2 แสดงการหาจุดสมดุลเทอร์โมไดนามิกเมื่อ ϵ มีค่าคงที่



รูปที่ 1 แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง R/C และค่าคงที่ K

Oil	(80°F) (Reyns(lb s/in.²))	μ (140°F) Reyns	μ_0 Reyns	b °F
SAE 10	1.18×10^{-5}	2.18×10^{-6}	1.58×10^{-5}	1157.5
SAE 20	1.95×10^{-5}	3.15×10^{-6}	1.36×10^{-5}	1271.6
SAE 30	3.35×10^{-5}	4.60×10^{-6}	1.41×10^{-5}	1360.9
SAE 40	5.50×10^{-5}	6.40×10^{-6}	1.21×10^{-5}	1474.4
SAE 50	9.50×10^{-5}	1.05×10^{-5}	1.70×10^{-5}	1509.6
SAE 60	1.42×10^{-4}	1.45×10^{-5}	1.87×10^{-5}	1564.0

Viscosity at any temperature T (°F) is given by

$$\mu(T) = \mu_0 e^{\frac{b}{T+\theta}}$$

where

$$\theta = 95^\circ\text{F}$$

μ_0 = lubricant "relative viscosity"

$$1/2 \leq \frac{L}{D} < 1$$

$$S \leq 0.15$$

$$\frac{h_0}{C} = 2.7258 \left(\frac{L}{D} \right)^{.83421} S^{-.7101 + .00113} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S \leq 0.04$$

$$\frac{h_0}{C} = 1.7176 \left(\frac{L}{D} \right)^{1.0478} S^{.4990 + .1868} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S \geq 0.04$$

$$\phi = 110.9067 \left(\frac{L}{D} \right)^{.00007} S^{.28836 + .07485} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{R}{C} f = 9.9533 \left(\frac{L}{D} \right)^{.4738} S^{.6705 + .1124} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{Q}{RNCL} = 4.1036 \left(\frac{L}{D} \right)^{.30624} S^{-.02499 + .009982} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{J\gamma C \Delta T}{P} = 42.0097 \left(\frac{L}{D} \right)^{.4146} S^{.6869 + .1600} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{P}{P_{max}} = 0.79567 \left(\frac{L}{D} \right)^{.50651} S^{.25659 + .04321} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S \geq 0.15$$

$$\frac{h_0}{C} = 0.91437 \left(\frac{L}{D} \right)^{.4538} S^{.6110 + .2590} \left(\frac{L}{D} \right) \quad S \leq 1$$

$$\frac{h_0}{C} = 0.89574 \left(\frac{L}{D} \right)^{.3894} S^{.3076 + .2537} \left(\frac{L}{D} \right) \quad S \geq 1$$

$$\phi = 74.0025 \left(\frac{L}{D} \right)^{.2295} S^{.3131 + .2172} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{Q}{RNCL} = 3.5251 \left(\frac{L}{D} \right)^{.2233} S^{-.1926 + .1149} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{R}{C} f = 20.4422 \left(\frac{L}{D} \right)^{.3125} S^{.8551 + .1014} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{J\gamma C \Delta T}{P} = 84.2989 \left(\frac{L}{D} \right)^{.08167} S^{.85540 + .08787} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{P}{P_{max}} = 0.52529 \left(\frac{L}{D} \right)^{.2450} S^{.2335 + .1870} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$1/4 \leq \frac{L}{D} < 1/2$$

$$S \leq 0.15$$

$$\frac{h_0}{C} = 9.2341 \left(\frac{L}{D} \right)^{.20773} S^{.4266 + .9247} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S \leq .04$$

$$\frac{h_0}{C} = 1.1545 \left(\frac{L}{D} \right)^{.4617} S^{.7811 + .3785} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S \geq .04$$

$$\phi = 112.7756 \left(\frac{L}{D} \right)^{.6117} S^{.2402 + .1316} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{R}{C} f = 9.4896 \left(\frac{L}{D} \right)^{.4640} S^{.7200 + .2201} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{Q}{RNCL} = 4.5007 \left(\frac{L}{D} \right)^{.10004} S^{-.00007 + .00000} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{J\gamma C \Delta T}{P} = 38.7703 \left(\frac{L}{D} \right)^{.10004} S^{.7122 + .2878} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{P}{P_{max}} = 0.78635 \left(\frac{L}{D} \right)^{.50002} S^{.25620 + .04378} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S \geq 0.15$$

$$\frac{h_0}{C} = 1.1674 \left(\frac{L}{D} \right)^{.80824} S^{.48016 + .02463} \left(\frac{L}{D} \right) \quad S \leq 1$$

$$\frac{h_0}{C} = 1.1263 \left(\frac{L}{D} \right)^{.7279} S^{.5117 + .6581} \left(\frac{L}{D} \right) \quad S \geq 1$$

$$\phi = 93.6908 \left(\frac{L}{D} \right)^{.5313} S^{.3139 + .2923} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{R}{C} f = 17.1809 \left(\frac{L}{D} \right)^{.3133} S^{.7993 + .2867} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{Q}{RNCL} = 3.4980 \left(\frac{L}{D} \right)^{.23973} S^{-.11107 + .04103} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{J\gamma C \Delta T}{P} = 69.4842 \left(\frac{L}{D} \right)^{.3075} S^{.8003 + .2783} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$\frac{P}{P_{max}} = 0.64927 \left(\frac{L}{D} \right)^{.5037} S^{.2783 + .3534} \left(\frac{L}{D} \right)$$

Stiffness Coefficients

$$0.5 \leq \frac{L}{D} \leq 1$$

$$S \leq 0.15$$

$$K'_{xx} = 0.5979 \left(\frac{L}{D} \right)^{.10181} S^{-.08663 + .1927} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{xy} = 2.0501 \left(\frac{L}{D} \right)^{.02127} S^{-.03713 + 0.1476} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yx} = -0.4816 + 1.7006 \left(\frac{L}{D} \right)^{.9335} S^2 + 11.6940 S^2$$

$$-16.3368 S \left(\frac{L}{D} \right) + 2.2198 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 2.5181 \left(\frac{L}{D} \right)^{.03236} S^{.4054 + 0.4707} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$0.15 \leq S \leq 1$$

$$K'_{xx} = 1.1251 \left(\frac{L}{D} \right)^{.06746} S^{.06179 + 0.4091} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{xy} = 7.5105 \left(\frac{L}{D} \right)^{.00776} S^{-.05424 + 1.0131} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yx} = 1.463 + 2.044 \left(\frac{L}{D} \right)^{.1290} S + 1.053 S^2$$

$$-12.272 S \left(\frac{L}{D} \right) + 4.378 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 2.2202 \left(\frac{L}{D} \right)^{.01704} S^{.03149 + 0.2771} \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S \geq 1.0$$

$$K'_{xx} = 2.3258 - 1.2120 \left(\frac{L}{D} \right)^{.03413} S - 0.3436 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{xx} = 8.1515 \left(\frac{L}{D} \right)^{1.1442} S^{0.4357} + 0.4717 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 12.2356 - 12.4891 \left(\frac{L}{D} \right) + 1.2669 S + 0.0756 S^2$$

$$+ 2.2224 S \left(\frac{L}{D} \right) - 10.9395 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{xy} = 2.2178 \left(\frac{L}{D} \right)^{-0.1786} S^{-0.0376} + 0.0383 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$0.25 \leq \frac{L}{D} < 0.5$$

$$S \leq 0.15$$

$$K'_{xx} = 0.3532 \left(\frac{L}{D} \right)^{-1.7179} S^{-0.3589} - 1.0922 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 1.9165 \left(\frac{L}{D} \right)^{-0.3674} S^{-0.6237} - 0.4357 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{xy} = 16.74 - 26.53 \left(\frac{L}{D} \right) + 13.63 S - 38.70 S^2$$

$$+ 43.72 S \left(\frac{L}{D} \right) - 20.12 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 7.4551 \left(\frac{L}{D} \right)^{1.1075} S^{-0.117} - 1.8354 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$0.15 < S \leq 1.0$$

$$K'_{xx} = 1.1897 \left(\frac{L}{D} \right)^{-0.6076} S^{-0.7172} + 0.3053 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 3.8102 \left(\frac{L}{D} \right)^{-0.02346} S^{-0.44757} + 0.85571 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{xy} = 4.4333 - 6.0498 \left(\frac{L}{D} \right) + 3.9980 S - 4.2133 S^2$$

$$+ 0.8848 S \left(\frac{L}{D} \right) - 4.6921 S \left(\frac{L}{D} \right) \quad S \leq 0.5$$

$$K'_{xx} = -7.027 + 10.473 \left(\frac{L}{D} \right) - 1.964 S + 2.039 S^2$$

$$- 19.4675 \left(\frac{L}{D} \right) + 8.995 S \left(\frac{L}{D} \right) \quad S \geq 0.5$$

$$K'_{xy} = 3.4171 \left(\frac{L}{D} \right)^{0.4407} S^{-0.2406} - 0.8095 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$S > 1.0$$

$$K'_{xx} = 1.2702 \left(\frac{L}{D} \right)^{-0.1041} S^{-0.8149} + 0.9723 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 5.7477 \left(\frac{L}{D} \right)^{0.00011} S^{0.2639} + 0.8173 \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{xy} = 27.92 - 32.71 \left(\frac{L}{D} \right) - 1.21 S - 0.404 S^2$$

$$+ 19.34 S \left(\frac{L}{D} \right) - 22.11 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$K'_{yy} = 3.1903 \left(\frac{L}{D} \right)^{0.1000} S^{0.1913} - 0.1900 \left(\frac{L}{D} \right)$$

Damping Coefficients

$$0.5 \leq \frac{L}{D} \leq 1$$

$$S \leq 0.05$$

$$C'_{xx} = -8.090 + 30.59 \left(\frac{L}{D} \right) - 1647.56 S + 7078.46 S^2$$

$$+ 771.86 S \left(\frac{L}{D} \right) + 219.81 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = -21.11 + 27.88 \left(\frac{L}{D} \right) - 705.62 S + 2327.28 S^2$$

$$+ 353.02 S \left(\frac{L}{D} \right) + 133.45 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = -22.24 + 28.43 \left(\frac{L}{D} \right) - 672.00 S + 2129.06 S^2$$

$$+ 337.77 S \left(\frac{L}{D} \right) + 132.83 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = -2.872 + 5.397 \left(\frac{L}{D} \right) - 204.892 S + 353.223 S^2$$

$$+ 106.010 S \left(\frac{L}{D} \right) + 31.329 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$0.05 < S \leq 0.25$$

$$C'_{xx} = 26.402 - 19.317 \left(\frac{L}{D} \right) - 5.201 S + 55.945 S^2$$

$$17.102 S \left(\frac{L}{D} \right) - 29.361 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 1.7126 + 0.1870 \left(\frac{L}{D} \right) - 9.7244 S + 10.0934 S^2$$

$$+ 5.0982 S \left(\frac{L}{D} \right) + 2.8168 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = 1.6125 - 0.201 \left(\frac{L}{D} \right) - 5.4768 S + 0.1344 S^2$$

$$+ 6.7569 S \left(\frac{L}{D} \right) + 2.2069 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 1.587 - 1.083 \left(\frac{L}{D} \right) - 18.793 S + 13.865 S^2$$

$$+ 30.244 S \left(\frac{L}{D} \right) + 2.021 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$0.25 < S \leq 1.0$$

$$C'_{xx} = 6.357 - 2.298 \left(\frac{L}{D} \right) - 17.294 S + 3.521 S^2$$

$$+ 19.892 S \left(\frac{L}{D} \right) - 5.635 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = 0.4641 + 1.8204 \left(\frac{L}{D} \right) - 0.6852 S + 0.3214 S^2$$

$$-2.1412 S \left(\frac{L}{D} \right) + 2.2092 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xx} = 0.4619 + 2.0240 \left(\frac{L}{D} \right) - 0.5145 S + 0.4168 S^2$$

$$-2.1685 S \left(\frac{L}{D} \right) + 1.9617 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = -7.852 + 10.414 \left(\frac{L}{D} \right) - 15.185 S + 3.567 S^2$$

$$+ 10.084 S \left(\frac{L}{D} \right) + 13.869 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$S > 1.0$

$$C'_{xx} = 26.424 - 25.646 \left(\frac{L}{D} \right) - 11.235 S - 0.044 S^2$$

$$+ 43.391 S \left(\frac{L}{D} \right) - 16.947 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 1.353 + 1.109 \left(\frac{L}{D} \right) + 0.376 S + 0.027 S^2$$

$$- 1.341 S \left(\frac{L}{D} \right) + 0.510 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = 4.059 - 2.013 \left(\frac{L}{D} \right) - 0.231 S - 0.004 S^2$$

$$+ 1.839 S \left(\frac{L}{D} \right) - 1.450 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xx} = 4.735 - 5.019 \left(\frac{L}{D} \right) - 7.506 S - 0.089 S^2$$

$$+ 26.089 S \left(\frac{L}{D} \right) - 2.897 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$0.25 \leq \frac{L}{D} < 0.5$$

$S \leq 0.10$

$$C'_{xx} = 151.70 - 220.05 \left(\frac{L}{D} \right) + 472.18 S - 867.54 S^2$$

$$+ 59.59 S \left(\frac{L}{D} \right) - 224.26 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 9.272 - 14.117 \left(\frac{L}{D} \right) - 16.803 S - 21.363 S^2$$

$$+ 44.802 S \left(\frac{L}{D} \right) - 1.517 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = 0.250 - 0.0677 \left(\frac{L}{D} \right) - 64.573 S + 60.894 S^2$$

$$+ 63.711 S \left(\frac{L}{D} \right) + 13.874 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xx} = 10.58 - 14.77 \left(\frac{L}{D} \right) - 67.23 S - 87.31 S^2$$

$$- 28.93 S \left(\frac{L}{D} \right) - 18.22 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$0.10 < S \leq 1.0$

$$C'_{xx} = 45.534 - 57.339 \left(\frac{L}{D} \right) + 5.652 S - 7.791 S^2$$

$$+ 61.060 S \left(\frac{L}{D} \right) - 38.020 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 8.035 - 10.785 \left(\frac{L}{D} \right) - 0.134 S - 0.8367 S^2$$

$$+ 6.204 S \left(\frac{L}{D} \right) - 2.591 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = 5.348 - 6.560 \left(\frac{L}{D} \right) - 2.161 S - 0.105 S^2$$

$$+ 5.534 S \left(\frac{L}{D} \right) - 0.277 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 1.000 - 0.6411 \left(\frac{L}{D} \right) - 0.7971 S + 0.4845 S^2$$

$$+ 5.3996 S \left(\frac{L}{D} \right) + 1.6987 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$S > 1.0$

$$C'_{xx} = 33.5977 - 36.630 \left(\frac{L}{D} \right) - 6.205 S - 0.315 S^2$$

$$+ 38.344 S \left(\frac{L}{D} \right) - 20.881 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 4.872 - 5.657 \left(\frac{L}{D} \right) - 0.391 S + 0.007 S^2$$

$$+ 0.576 S \left(\frac{L}{D} \right) + 0.201 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{yy} = 5.145 - 4.047 \left(\frac{L}{D} \right) - 0.577 S - 0.016 S^2$$

$$+ 2.744 S \left(\frac{L}{D} \right) + 1.615 S \left(\frac{L}{D} \right)$$

$$C'_{xy} = 3.657 - 7.447 \left(\frac{L}{D} \right) - 3.246 + 0.174 S^2$$

$$+ 11.932 S \left(\frac{L}{D} \right) + 1.951 S \left(\frac{L}{D} \right)$$