

สมการรูปแบบการเคลื่อนที่ของฝูงบิน Equations of Motion for Flying Formation System

นางสาวกมลวรรณ เมืองมินทร์¹ และ นายธนภัทร์ วานิชานนท์^{1*}

¹ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล 25/25 ถ.พุทธมนฑล สาย 4 ต. ศาลายา อ.พุทธมนฑล จ.นครปฐม 73170

*ติดต่อ: E-mail : thanapat.wan@mahidol.ac.th เบอร์โทรศัพท์ : +66 2-889-2138 ext. 6401

บทคัดย่อ

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข (Fundamental Equations of Constrained Motion) สามารถใช้วิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยแบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ I) การเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไข II) สมการเงื่อนไข และ III) สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข ซึ่งสมการที่ได้จะเป็นสมการที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้นของความเร่ง (Acceleration) โดยสามารถหาข้อมูลจลนศาสตร์ของการเคลื่อนที่ที่เหลื้ได้โดยการเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันของความเร็ว (Velocity) และฟังก์ชันของระยะทาง (Distance) ด้วยการหาปริพันธ์

อีกหนึ่งตัวอย่างของการใช้สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไขในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่คือการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของฝูงบิน ซึ่งเป็นประโยชน์ในแง่ของความสะดวกในการควบคุมและการประหยัดพลังงานในการบินของเครื่องบินหลายลำ ซึ่งสามารถปรับใช้ได้กับการควบคุมการเคลื่อนที่ของอากาศยานไร้คนขับ ในงานวิจัยนี้จะทำการวิเคราะห์ในหลากหลายรูปแบบการบิน ทั้งการบินเป็นเส้นตรง และการบินเป็นแนววิถีโค้ง ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ในรูปแบบพื้นฐาน การปรับจำนวนเครื่องบินเพิ่มมากขึ้น การกำหนดการบินในรูปแบบที่ซับซ้อนมากขึ้น เพื่อศึกษาการใช้สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไขในการวิเคราะห์การบิน ซึ่งสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข สามารถกำหนดรูปแบบการเคลื่อนที่ให้เป็นไปตามที่ต้องการได้ การพิสูจน์สมการที่ได้จากการวิเคราะห์จะทำได้โดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB

คำหลัก: สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข; รูปแบบการบิน; อากาศยานไร้คนขับ

Abstract

An analysis of motions by using the Fundamental Equations of Constrained Motion can be determined in three-step procedure as follows I) Unconstrained Motion II) Constraint Equation and III) Constrained Motion. The equations of motion are expressed as linear functions of acceleration. Other Kinematical parameters can be obtained by changing acceleration into functions of velocity and functions of distance by integration.

One example of using the fundamental equation to study motions is the study of flying formation systems. It is useful for multi-object flying in aspect of easy controlling and saving energy, which can be adapted for controlling a flying of unmanned aerial vehicles (UAVs). In this research, some flying formation systems are considered by using the Fundamental Equations of Motion. Preferably, straight flying and curved flying have to be determined because these are basic motions. Moreover, increasing the number of planes and complicated flying are studied for validating the equation. The results show that the control forces from the Fundamental Equations can control the planes to fly in the desired trajectories. The constrained equations of motion are verified by using the computer program MATLAB.

Keywords: Fundamental Equations of motion; Flying formation system; Unmanned aerial vehicle

AME-02

1. บทนำ

การพัฒนาอากาศยานไร้คนขับ เป็นหนึ่งในการพัฒนาทางทหารที่สำคัญ เพื่อความปลอดภัยของประชาชน การป้องกันประเทศ และจัดภัยคุกคามของชาติ การใช้อากาศยานไร้คนขับในการเข้าปฏิบัติการในบริเวณที่อันตราย และเสี่ยงต่อการสูญเสีย จึงเป็นที่สนใจ และมีการศึกษาอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากอากาศยานไร้คนขับมีรูปแบบการบินโดยปราศจากมนุษย์ผู้ควบคุม วิศวกรจึงมีหน้าที่คำนวณเพื่อกำหนดเป้าหมาย และรูปแบบการบินที่แน่นอนไว้ล่วงหน้า ดังเช่นตัวอย่างการทดลองการกำหนดเงื่อนไขเส้นทางให้เฮลิคอปเตอร์เคลื่อนที่จากตำแหน่งเริ่มจนถึงตำแหน่งสุดท้ายได้อย่างปลอดภัย [1]

กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน เป็นทฤษฎีที่ว่าด้วย แรง ความเร่ง และทิศทางของการเคลื่อนที่ กฎการเคลื่อนที่นี้ ได้ถูกนำมาใช้ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ต่างๆ ของวัตถุ เช่น ได้มีการนำมาวิเคราะห์หาสมการการเคลื่อนที่ของยานอวกาศ ร่วมกับการใช้สมการของออยเลอร์ [2] อีกทฤษฎีการเคลื่อนที่ที่สำคัญ ที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายคือ สมการการเคลื่อนที่ของลากรางจ์ ซึ่งได้นำไปใช้ในการศึกษาการควบคุมการเคลื่อนที่ของแขนกลสำหรับหุ่นยนต์อวกาศ [3] สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข [4] เป็นอีกวิธีที่นิยมใช้ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ เนื่องจากสมการดังกล่าวมีรูปแบบทั่วไป (Closed-Form) ที่แน่นอน สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไขนี้ถูกพัฒนาขึ้นจากการรวมทฤษฎีของเกาส์ [5] และสมการการเคลื่อนที่ของลากรางจ์ ซึ่งสมการจะมีรูปทั่วไปคือ [4]

$$M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) + M^{1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (1)$$

โดยที่ '+' คือ Moore-Penrose inverse ของเมตริกซ์ [6]

สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไขให้ความแม่นยำในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ เนื่องจากสามารถวิเคราะห์การเคลื่อนที่ได้ทั้งในระดับการเคลื่อนที่ที่เป็นเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้น ตัวอย่างของการใช้สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไขคือ การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของยานอวกาศในรูปแบบต่างๆ [7] ซึ่งการกำหนดเงื่อนไขการเคลื่อนที่นั้นสามารถกำหนดพร้อมกันได้ทั้งหมดทุกค่าและยังสามารถกำหนดการเคลื่อนที่ให้สัมพันธ์กันทุกค่าได้ สมการการเคลื่อนที่ที่ได้สามารถใช้งานได้ง่าย และผลที่ได้มีความแม่นยำสูง

การศึกษาการเคลื่อนที่ของเครื่องบินและหลักพลศาสตร์ของการบิน โดยการกำหนดเงื่อนไขการบิน [8] มีความสำคัญต่อการพัฒนาอากาศยานไร้คนขับ เพื่อวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น สำหรับรูปแบบการบินที่ต้องการ

สำหรับในประเทศไทย อากาศยานไร้คนขับมีการใช้งานในกองทัพไทย ทั้งกองทัพบก และกองทัพอากาศ สำหรับกองทัพเรือมีแผนการพัฒนาการใช้อากาศยานไร้คนขับ เพื่อการป้องกันประเทศในอนาคต [9]

งานวิจัยนี้ ศึกษาการใช้สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข ในการกำหนดรูปแบบการบินของเครื่องบินหลายลำ เพื่อเป็นพื้นฐานในการพัฒนาอากาศยานไร้คนขับของประเทศไทย ต่อไปในอนาคต

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 การเคลื่อนที่ปราศจากเงื่อนไข

สมการการเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไข หาได้โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของลากรางจ์ รูปทั่วไปคือ [4]

$$M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) \quad (2)$$

โดย M = เมตริกซ์มวล

q = ระยะทาง

$\dot{q}$ = ความเร็ว

$\ddot{q}$ = ความเร่ง

Q = เวกเตอร์แรง

t = เวลา

สำหรับการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของฝูงบิน ในการคำนวณเราจะเลือกใช้ระบบพิกัดมุมฉาก (Cartesian Coordinates) เป็น x, y, z โดยเราสมมติว่าในแต่ละแกนจะไม่มีเงื่อนไขและเป็นอิสระต่อกัน เราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัด (x, y, z) ในรูปเมตริกซ์ได้คือ (ดูสมการ (2))

$$M\ddot{q} := \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} := Q \quad (3)$$

การเคลื่อนที่นี้เป็นการเคลื่อนที่ภายใต้แรง Q ซึ่งได้ถูกแบ่งแยกออกเป็นแรงในแต่ละแกนของระบบพิกัดมุมฉาก (Q_x, Q_y, Q_z) เมื่อคูณสมการ (2) ด้วย M^{-1} จะได้

$$\ddot{q} = M^{-1}Q := a \quad (4)$$

โดย a คือความเร่งโดยปราศจากเงื่อนไข

AME-02

2.2 สมการเงื่อนไข

สมการเงื่อนไขเป็นสมการที่ใช้กำหนดรูปแบบการเคลื่อนที่ของฟองบิน โดยทั่วไปจะอยู่ในรูปฟังก์ชันของระยะทาง ความเร็ว และเวลา รูปทั่วไปของสมการลักษณะการเคลื่อนที่หรือสมการเงื่อนไขคือ

$$f(q, \dot{q}, t) = 0 \quad (5)$$

เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่เหมาะสม (ซึ่งในกรณีของสมการเงื่อนไขที่เป็นเส้นตรง อนุพันธ์อันดับที่เหมาะสมคืออนุพันธ์อันดับสอง) ของสมการลักษณะการเคลื่อนที่ จะได้สมการในรูปฟังก์ชันของความเร่ง มีรูปทั่วไปคือ [4]

$$A(q, \dot{q}, t)\ddot{q} = b(q, \dot{q}, t) \quad (6)$$

โดย A คือ เมตริกซ์เงื่อนไข และ b คือ เวกเตอร์เงื่อนไข

2.3 การเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข

จากสมการการเคลื่อนที่ปราศจากเงื่อนไขและสมการเงื่อนไข เราสามารถกำหนดสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไขได้ดังนี้ [4]

$$M(q, t)\ddot{q} = Q(q, \dot{q}, t) + Q^c(q, \dot{q}, t) \quad (7)$$

จาก (7) แรงที่ทำให้ระบบเป็นไปตามเงื่อนไขคือ [4]

$$Q^c(q, \dot{q}, t) = M^{1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (8)$$

เมื่อคูณสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไขด้วย M^{-1} จะได้ความเร่งของระบบที่มีเงื่อนไขคือ

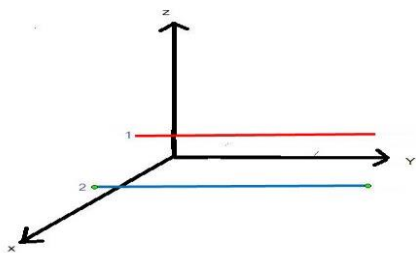
$$\ddot{q} = a + M^{-1/2}(AM^{-1/2})^+(b - Aa) \quad (9)$$

ซึ่งสามารถหาปริพันธ์อันดับ 1 และปริพันธ์อันดับ 2 เพื่อหาความเร็วของระบบฟองบิน และตำแหน่งของการเคลื่อนที่ของเครื่องบินแต่ละลำในฟองบินได้ตามลำดับ โดยอ้างอิงข้อมูลจากค่าเริ่มต้นของระบบ

3. การทดลอง และผลการทดลอง

3.1 การทดลองที่ 1:

บินขนานกันเป็นเส้นตรงของเครื่องบิน 2 ลำ



รูปที่ 1 รูปจำลองการบินขนานกันเป็นเส้นตรงของเครื่องบิน 2 ลำ

3.1.1 การเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไข

(Unconstrained Equation)

สำหรับขั้นตอนของการเคลื่อนที่ปราศจากเงื่อนไขเป็นการพิจารณาสมการที่ทำให้เครื่องบินสามารถลอยตัวต้านแรงโน้มถ่วงของโลก (Gravity, G) ซึ่งกระทำต่อระบบตามแนวแกน z เมื่อพิจารณาแรงที่ใช้ในการขับเคลื่อนเครื่องบินไปข้างหน้า โดยสมมติให้เครื่องบินเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงโดยมีทิศทางตามแนวแกน y ดังรูปที่ 1 และเนื่องจากรูปแบบการบินเป็นการบินของเครื่องบิน 2 ลำเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง การคำนวณต้องมีตัวแปรของแต่ละลำ เราสามารถเขียนสมการการเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไขในแต่ละแกน (x,y,z) ดังนี้

$$m_1\ddot{x} = 0$$

$$m_1\ddot{y} = T_1 \quad (10)$$

$$m_1\ddot{z} = m_1G$$

โดย G คือ แรงโน้มถ่วงโลก

m_1 คือ มวลของเครื่องบินลำที่ i

T_1 คือ แรงขับเคลื่อนของเครื่องบินลำที่ i

จากสมการ (4) และ (10) เราสามารถเขียนสมการให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันความเร่งได้ คือ

$$\ddot{q} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_1 \\ G \\ 0 \\ T_2 \\ G \end{bmatrix} = a \quad (11)$$

โดยกำหนดให้ $m_1 = m_2 = 10 \text{ kg}$, $T_1 = T_2 = 100 \text{ N}$,

และ $G = 9.81 \text{ m/s}^2$

3.1.2 สมการเงื่อนไข (Constraint Equation)

สำหรับเงื่อนไขการบินของฟองบิน กำหนดให้มีเงื่อนไขดังนี้

1. กำหนดระยะห่างของเครื่องบินทั้งสองในแนวแกน x ในระหว่างการบิน

กำหนดให้เครื่องบิน 2 ลำ มีระยะห่างในการบินเป็นระยะ 10 หน่วยตามแนวแกน x จึงกำหนดสมการเงื่อนไขคือ

AME-02

$$x_1 - x_2 = -10 \quad (12)$$

2. กำหนดระยะและระดับการบินของเครื่องบินแต่ละลำในแนวแกน y และ z ตามลำดับ

กำหนดให้ระยะและระดับการบินของทั้งสองลำบินในระยะและระดับเดียวกันในแนวแกน y และ z ตามลำดับ จึงกำหนดสมการเงื่อนไข คือ

$$y_1 - y_2 = 0 \quad (13)$$

$$z_1 - z_2 = 0 \quad (14)$$

และกำหนดให้ ความสูงในการบินของเครื่องบินทั้งสอง คือ 100 หน่วยตามแนวแกน z

$$z_1 = 100 \quad (15)$$

จากการหาอนุพันธ์อันดับสองของสมการเงื่อนไข (สมการ (12)-(15)) จะได้

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0 \quad (16)$$

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0 \quad (17)$$

$$\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 = 0 \quad (18)$$

$$\ddot{z}_1 = 0 \quad (19)$$

ตามลำดับ เขียนสมการ (16) - (19) ในรูปเมตริกซ์จะได้ (ดูสมการ (6))

$$A\ddot{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = b \quad (20)$$

3.1.3 การเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข

(Constrained Equation)

โดยรูปทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข (สมการ 9) คือ

$$\ddot{q} = a + M^{-1/2}(AM^{-1/2})^+ (b - Aa) \quad (21)$$

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เครื่องบินทั้ง 2 ลำ คือ

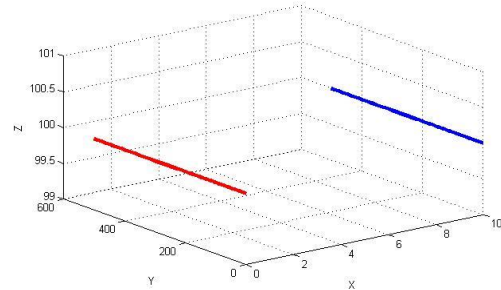
$$\begin{aligned} x_{1,0} &= 0 & y_{1,0} &= 0 & z_{1,0} &= 100 \\ x_{2,0} &= 0 & y_{2,0} &= 0 & z_{2,0} &= 100 \end{aligned} \quad (22)$$

เมื่อเทียบสมการ (20) ที่ได้จากสมการ (6) จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

แทนค่า A, b, a (สมการ 11) และเมตริกซ์มวล M ใน

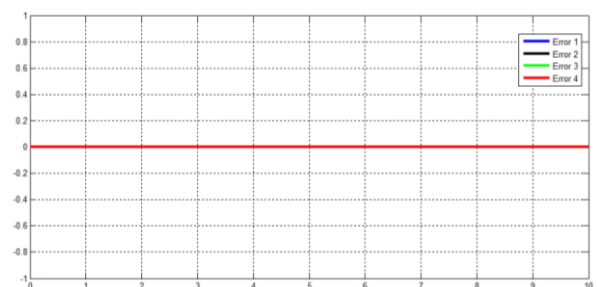
สมการรูปทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข (สมการ (21)) และใช้ค่าเริ่มต้นการบินจากสมการ (22) ทำการหาปริพันธ์อันดับ 2 จะได้เส้นทางการบินของเครื่องบินทั้งสองตามรูปที่ 2



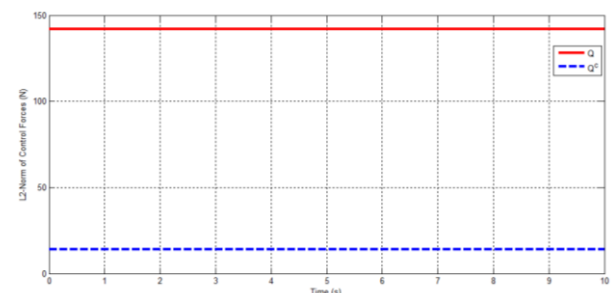
รูปที่ 2 แสดงการจำลองการบินขนานกันเป็นเส้นตรงของเครื่องบิน 2 ลำ บนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB

จะเห็นว่าเครื่องบินทั้งสอง บินขนานกันเป็นเส้นตรง โดยมีระยะห่างระหว่างกัน 10 หน่วย และมีระดับความสูง 100 หน่วยจากพื้นดิน

รูปที่ 3 แสดงค่าความคลาดเคลื่อนต่อสมการเงื่อนไขของเครื่องบินทั้งสอง (ดูสมการ (12)-(15)) รูปที่ 4 แสดง L2-Norm ของแรง Q จากการเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไข และแรง Q^c ที่ใช้ในการควบคุมให้เครื่องบินทั้งสองเคลื่อนที่ไปตามเงื่อนไข จะเห็นว่าแรง Q^c ที่ใช้มีขนาดน้อยกว่าแรง Q



รูปที่ 3 ค่าความคลาดเคลื่อนของเส้นทางการเคลื่อนที่ของเครื่องบินในแต่ละเงื่อนไขที่กำหนด

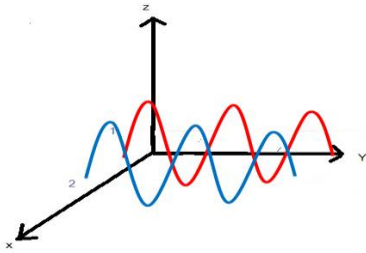


รูปที่ 4 L2-Norm ของแรงกระทำต่อเครื่องบิน

AME-02

3.2 การทดลองที่ 2 :

บิณรูปแบบคลื่น Sine ของเครื่องบิน 2 ลำ



รูปที่ 5 รูปจำลองการบินรูปแบบคลื่น Sine ของเครื่องบิน 2 ลำ

3.2.1 การเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไข

(Unconstrained Equation)

เนื่องจากรูปแบบการบินเป็นการบินของเครื่องบิน 2 ลำ เคลื่อนที่เป็นรูปคลื่น sine ภายใต้แรงโน้มถ่วงโลก การคำนวณต้องมีตัวแปรของแต่ละลำ เช่นเดียวกับการทดลองที่ 1 ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่แบบปราศจากเงื่อนไขสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของความเร่งได้ คือ (ดูสมการ (11))

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} := \mathbf{a} \quad (24)$$

3.2.2 สมการเงื่อนไข (Constraint Equation)

กำหนดสมการเงื่อนไขตามรูปแบบการบินที่ต้องการ

1. กำหนดให้เครื่องบิน 2 ลำ มีระยะห่างในการบินเป็นระยะ 10 หน่วยตามแนวแกน x ดังนั้นสมการเงื่อนไข คือ

$$x_1 - x_2 = -10 \quad (25)$$

2. กำหนดให้ระยะและระดับการบินของทั้งสองลำบินในระนาบและระดับเดียวกันในแนวแกน y และ z ตามลำดับ ดังนั้นสมการเงื่อนไข คือ

$$y_1 - y_2 = 0 \quad (26)$$

$$z_1 - z_2 = 0 \quad (27)$$

3. เครื่องบินบินในลักษณะคลื่น sine ซึ่งบินไปตามแนวของแกน y บนระนาบ yz ดังนั้นสมการเงื่อนไข คือ

$$z_1 = \sin y_1 \quad (28)$$

จากการหาอนุพันธ์อันดับสองของสมการเงื่อนไข (สมการ (25)-(28)) จะได้

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0 \quad (29)$$

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0 \quad (30)$$

$$\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 = 0 \quad (31)$$

$$(\cos y_1)\ddot{y}_1 - \ddot{z}_1 = \ddot{y}_1^2 (\sin y_1) \quad (32)$$

ตามลำดับ เขียนสมการ (29) – (32) ในรูปเมตริกซ์ จะได้

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \cos(y_1) & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{y}_1^2 \sin(y_1) \end{bmatrix} = \mathbf{b} \quad (33)$$

3.2.3 การเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข

(Constrained Equation)

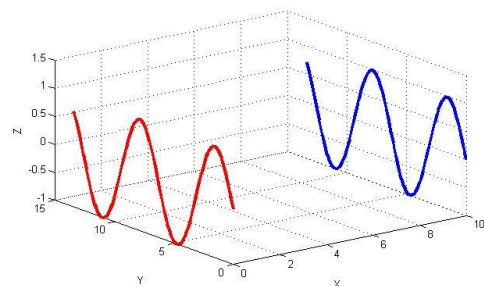
กำหนดค่าเริ่มต้นให้เครื่องบินทั้ง 2 ลำ คือ

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= 0 & y_{1,0} &= 0 & z_{1,0} &= 0 \\ x_{2,0} &= 10 & y_{2,0} &= 0 & z_{2,0} &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

เมื่อเทียบสมการ (33) ที่ได้กับสมการ (6) จะได้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \cos(y_1) & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddot{y}_1^2 \sin(y_1) \end{bmatrix} \quad (35)$$

แทนค่า A, b, a (สมการ (11)) และเมตริกซ์มวล M ในสมการรูปทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข (สมการ (21)) และใช้ค่าเริ่มต้นการบินจากสมการ (34) ทำการหาปริพันธ์อันดับ 2 จะได้เส้นทางการบินของเครื่องบินทั้งสองตามรูปที่ 6



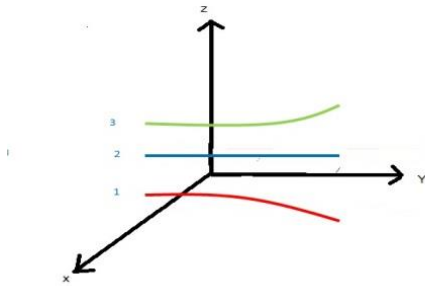
รูปที่ 6 แสดงการจำลองการบินรูปแบบคลื่น Sine ของเครื่องบิน 2 ลำ บนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB

จะเห็นว่าเครื่องบินทั้งสอง บินขนานกันเป็นรูปคลื่น sine โดยมีระยะห่างระหว่างกัน 10 หน่วยตามต้องการ

AME-02

3.3 การทดลองที่ 3 :

บินแนววิถีโค้งแบบ Exponential ของเครื่องบิน 3 ลำ



รูปที่ 7 รูปจำลองการบินตามแนววิถีโค้งแบบ Exponential ของเครื่องบิน 3 ลำ

3.3.1 การเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไข

(Unconstrained Equation)

เนื่องจากรูปแบบการบินของเครื่องบิน 3 ลำนี้ มีเครื่องบิน 1 ลำบินเป็นเส้นตรงอยู่ตรงกลางและอีกสองลำจะบินเป็นเส้นโค้งหนีออกจากลำแรกที่อยู่ใก้แกนกลาง การคำนวณต้องมีตัวแปรของแต่ละลำ จากสมการ (4) เราสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันของความเร่งได้ คือ

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{z}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{y}_3 \\ \ddot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1^{-1} & \bar{0}_{3 \times 3} & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \bar{0}_{3 \times 3} & M_2^{-1} & \bar{0}_{3 \times 3} \\ \bar{0}_{3 \times 3} & \bar{0}_{3 \times 3} & M_3^{-1} \end{bmatrix}_{9 \times 9} \begin{bmatrix} 0 \\ T_1 \\ m_1 G \\ 0 \\ T_2 \\ m_2 G \\ 0 \\ T_3 \\ m_3 G \end{bmatrix} = M^{-1} \mathbf{Q} := \mathbf{a} \quad (36)$$

เมื่อ $M_i^{-1} := \text{diag}(m_i^{-1}, m_i^{-1}, m_i^{-1})$ และ $\bar{0} = 3 \times 3$ zero matrix ในการทดลองเรากำหนดให้ $m_1 = m_2 = m_3 = 10 \text{ kg}$, $T_1 = T_2 = T_3 = 100 \text{ N}$ และ $G = 9.81 \text{ m/s}^2$

3.3.2 สมการเงื่อนไข (Constraint Equation)

กำหนดสมการเงื่อนไขตามรูปแบบการบินที่ต้องการ
1. กำหนดให้เครื่องบินทั้ง 3 มีระยะเท่ากันทั้งหมด ในระยะของแกน x และแกน y จึงกำหนดสมการเงื่อนไขดังนี้

$$x_1 - x_2 = 0 \quad (37)$$

$$x_2 - x_3 = 0 \quad (38)$$

$$x_1 - x_3 = 0 \quad (39)$$

$$y_1 - y_3 = 0 \quad (40)$$

$$y_2 - y_3 = 0 \quad (41)$$

2. กำหนดให้เครื่องบินลำที่ 1 และลำที่ 3 บินโค้งแบบ exponential และเครื่องบินลำที่ 2 บินเป็นเส้นตรง

$$z_1 = -10e^{y_1} \quad (42)$$

$$z_2 = 0 \quad (43)$$

$$z_3 = 10e^{y_3} \quad (44)$$

จากการหาอนุพันธ์อันดับสองของสมการเงื่อนไข (สมการ (37)-(44)) จะได้

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0 \quad (45)$$

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 = 0 \quad (46)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 = 0 \quad (47)$$

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_3 = 0 \quad (48)$$

$$\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3 = 0 \quad (49)$$

$$\ddot{z}_1 + 10\ddot{y}_1 e^{y_1} = -10\dot{y}_1^2 e^{y_1} \quad (50)$$

$$\ddot{z}_2 = 0 \quad (51)$$

$$\ddot{z}_3 - 10\ddot{y}_3 e^{y_3} = 10\dot{y}_3^2 e^{y_3} \quad (52)$$

ตามลำดับ เขียนสมการ (45) – (52) ในรูปเมตริกซ์ และเทียบสมการเมตริกซ์ที่ได้กับสมการ (6) จะได้

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10e^{y_3} & 1 \\ 0 & 10e^{y_1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 10\dot{y}_3^2 e^{y_3} & -10\dot{y}_1^2 e^{y_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (53)$$

3.3.3 การเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข

(Constrained Equation)

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เครื่องบินทั้ง 3 ลำ คือ

$$x_{1,0} = 0 \quad y_{1,0} = 0 \quad z_{1,0} = -10$$

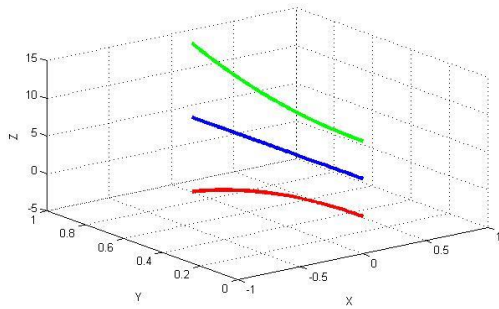
$$x_{2,0} = 0 \quad y_{2,0} = 0 \quad z_{2,0} = 0 \quad (54)$$

$$x_{3,0} = 0 \quad y_{3,0} = 0 \quad z_{3,0} = 10$$

แทนค่า A, b, a (สมการ (36)) และค่าเมตริกซ์มวล M ในสมการรูปทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข

AME-02

(สมการ (9)) และใช้ค่าเริ่มต้นการบินจากสมการ (54) ทำการหาปริพันธ์อันดับ 2 จะได้เส้นทางการบินของเครื่องบินทั้งสามตามรูปที่ 8

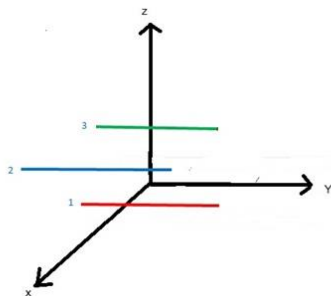


รูปที่ 8 แสดงการจำลองการบินตามแนววิถีโค้งแบบ Exponential บนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB

จะเห็นว่าเครื่องบินทั้งสาม บินตามแนววิถีโค้งแบบ Exponential ตามต้องการ

3.4 การทดลองที่ 4 :

บินรูปแบบหน้าตัดสามเหลี่ยมของเครื่องบิน 3 ลำ



รูปที่ 9 รูปจำลองการบินรูปแบบหน้าตัดสามเหลี่ยมของเครื่องบิน 3 ลำ

3.4.1 การเคลื่อนที่โดยปราศจากเงื่อนไข (Unconstrained Equation)

การบินรูปแบบนี้จะกำหนดให้เครื่องบิน 3 ลำ บินเป็นเส้นตรง โดยรักษาพื้นที่หน้าตัดรูปสามเหลี่ยมระหว่างเครื่องบินทั้งสาม การคำนวณต้องมีตัวแปรของแต่ละลำ เช่นเดียวกับการทดลองที่ 3 ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่แบบปราศจากเงื่อนไขสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันความเร่งได้ คือ (ดูสมการ (36))

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{Q} := \mathbf{a} \quad (55)$$

3.3.2 สมการเงื่อนไข (Constraint Equation)

กำหนดสมการเงื่อนไขตามรูปแบบการบินที่ต้องการ

1. กำหนดให้เครื่องบินแต่ละลำมีระยะห่างในการบินระหว่างกันเท่ากัน คือ 100 หน่วยตลอดระยะการบิน โดยเส้นที่ลากเชื่อมแต่ละลำทำมุม 60 องศาซึ่งกันและกันบนระนาบ xz กำหนดสมการเงื่อนไข คือ

$$x_1 - x_2 = -100 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (56)$$

$$x_2 - x_3 = 100 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (57)$$

$$x_1 - x_3 = 200 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (58)$$

$$z_1 - z_2 = -100 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (59)$$

$$z_2 - z_3 = 0 \quad (60)$$

$$z_1 - z_3 = -100 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad (61)$$

2. กำหนดระยะในแกน y ของทุกลำมีค่าเท่ากัน

$$y_1 - y_2 = 0 \quad (62)$$

$$y_2 - y_3 = 0 \quad (63)$$

$$y_1 - y_3 = 0 \quad (64)$$

จากการหาอนุพันธ์อันดับสองของสมการเงื่อนไข (สมการ (56)-(64)) จะได้

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = 0 \quad (65)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_3 = 0 \quad (66)$$

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_3 = 0 \quad (67)$$

$$\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2 = 0 \quad (68)$$

$$\ddot{z}_2 - \ddot{z}_3 = 0 \quad (69)$$

$$\ddot{z}_1 - \ddot{z}_3 = 0 \quad (70)$$

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_2 = 0 \quad (71)$$

$$\ddot{y}_2 - \ddot{y}_3 = 0 \quad (72)$$

$$\ddot{y}_1 - \ddot{y}_3 = 0 \quad (73)$$

ตามลำดับ เขียนสมการ (65) – (73) ในรูปเมตริกซ์ และเทียบสมการเมตริกซ์ที่ได้กับสมการ (6) จะได้

AME-02

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } b = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (74)$$

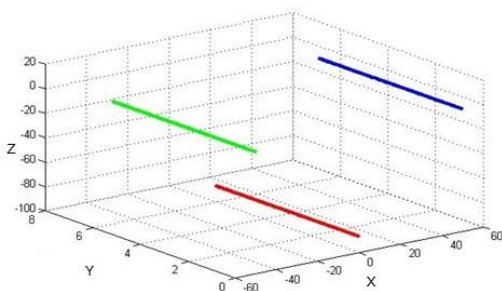
3.4.3 การเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข

(Constrained Equation)

กำหนดค่าเริ่มต้นให้เครื่องบินทั้ง 3 ลำ คือ

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= 0 & y_{1,0} &= 0 & z_{1,0} &= -100 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ x_{2,0} &= 0 & y_{2,0} &= 0 & z_{2,0} &= 0 \\ x_{3,0} &= -100 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & y_{3,0} &= 0 & z_{3,0} &= 100 \end{aligned} \quad (75)$$

แทนค่า A, b, a (สมการ (36)) และค่าเมตริกซ์มวล M ในสมการรูปทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข (สมการ (9)) และใช้ค่าเริ่มต้นการบินจากสมการ (75) ทำการหาปริพันธ์อันดับ 2 จะได้เส้นทางการบินของเครื่องบินทั้งสามตามรูปที่ 10



รูปที่ 10 แสดงการจำลองการบินรูปแบบหน้าต่างสามเหลี่ยมบนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB

จะเห็นว่าเครื่องบินทั้งสามลำ บินเป็นรูปหน้าต่างสามเหลี่ยมตามต้องการ

4. สรุปและวิจารณ์ผลการทดลอง

สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข สามารถใช้วิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยสามารถใช้งานได้ง่าย เนื่องจากเป็นสมการที่มีรูปทั่วไป สามารถวิเคราะห์การ

เคลื่อนที่ได้ในระดับที่ไม่เป็นเชิงเส้น และการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้สมการนี้ ไม่ต้องคำนึงถึงทิศทางตามแนวแกน เนื่องจากได้พิจารณาการเคลื่อนที่ในแต่ละแกนแล้ว

การใช้สมการการเคลื่อนที่แบบมีเงื่อนไข กำหนดการบินของเครื่องบินในรูปแบบต่างๆ พบว่าสามารถกำหนดให้เครื่องบินเคลื่อนที่ตามรูปแบบที่ต้องการได้ ซึ่งการพิสูจน์ได้ทำการโดยใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ MATLAB

ในช่วงเวลาของการจำลองการบิน สามารถจำลองรูปแบบการบินในแต่ละรูปแบบได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น ซึ่งการพัฒนาต่อไปคือ การที่เครื่องบินสามารถเปลี่ยนรูปแบบการบินจากลักษณะหนึ่งไปอีกลักษณะหนึ่งได้

การวิเคราะห์และคำนวณ ในงานวิจัยชิ้นนี้ ได้สมมติให้เครื่องบินเป็นอนุภาค นั่นคือการคำนวณโดยไม่สนใจขนาดและทิศทางของเครื่องบิน และการกำหนดค่าต่างๆ สำหรับการบิน เพียงเพื่อง่ายต่อความเข้าใจเท่านั้น

การใช้งานจริงสำหรับการควบคุมเครื่องบินนั้น ความเป็นไปได้ของรูปแบบการบินมีความสำคัญมาก เนื่องจากความสอดคล้องกับหลักพลศาสตร์ การคำนึงถึงการกำหนดค่าต่างๆ เป็นสิ่งที่ต้องมีการศึกษาเพิ่มเติม

5. กิตติกรรมประกาศ

คณะผู้วิจัยขอขอบคุณ นายอนุตร รัตปณ, นางสาวรุ่งตะวัน สว่างเพ็ชร, และนายสิทธิพงศ์ วงศ์จันทร์ทิพย์ ที่ได้ให้คำปรึกษา ชี้แนะในการทำวิจัย และขอขอบคุณ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหิดล สำหรับความช่วยเหลือในการทำวิจัย

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Saripalli S, Montgomery JF, Sukhatme G, editors. *Vision-based autonomous landing of an unmanned aerial vehicle. Robotics and automation*, 2002 Proceedings ICRA'2 IEEE international conference on; 2002: IEEE.
- [2] Stoneking, E. Newton Dynamic Equation of motion for a Multi-body Spacecraft. 2007. NASA Goddard Space Flight Center, Greenbelt, MD 20771, USA.

AME-02

- [3] Dubowsky, EPS. Coordinated Manipulator/Spacecraft Motion Control for space Robotic System. *International Conference on Robotics and Automation*; Sacramento, California 1991.
- [4] Udwadia F, Kalaba R. Equation of Motion for Mechanical System. *Aerospace Engineering*. 1996:64-9.
- [5] Gauss C. Uber ein neues allgemeines grundgesetz der mechanik. *J Reine Angew Math* 1829:4:232–235
- [6] Tian, Y. The Moore-Penrose inverses of $m \times n$ matrices and their applications block. *Montreal, Quebec, Canada: Concordia University*; 1998.
- [7] Lam T, Schutte A, Udwadia FE, editors. Constraint Based Control Method for Precision Formation Flight of Spacecraft. *2006 AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting*; 2006; Tampa, Florida: NASA.
- [8] Zou Y, Pagilla PR, Ratliff RT. Distributed Formation Flight Control Using Constraint Forces. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2009; 32(January-February):9.
- [9] พงศ์พิพัฒน์ ท. มนุษยชาติกับเทคโนโลยี ตอนที่ ๓ อวกาศยานไร้คนขับ. *นาวิกศาสตร์*. 2554 11 พฤศจิกายน 2554:5-16.