การวิเคราะห์รูปแบบการสั่นสะเทือนของคานที่ทำจากวัสดุคอมโพสิตแบบลามิเนตเพื่อศึกษาอิทธิพลของสัดส่วนกว้างของคานและสัดส่วนโมดูลัส

Mode Shape Vibration Analysis of Laminated Composite Beams with different Slenderness Ratios and Modulus Ratios

ชาลิดา อนรรฆพจนกุล, พงศ์ธร พรหมบุตร*

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เลขที่ 50 ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900
*ติดต่อ: pongtorn.p@ku.ac.th, โทรศัพท์ 0-2797-0999 โทรสาร 0-2579-4576

บทคัดย่อ

ปัจจุบันวัสดุคอมโพสิตมีการใช้อย่างแพร่หลายเนื่องจากคุณสมบัติความแข็งแรงของวัสดุต่อน้ำหนักวัสดุที่สูงทำให้สามารถออกแบบได้หลากหลายต่อการใช้งาน เช่นชิ้นส่วนปีกเครื่องบิน โครงสร้างเรือ ใบพัดเฮลิคอปเตอร์ ทศวรรษที่ผ่านมางานวิจัยจะเริ่มศึกษารูปแบบการสั่นสะเทือน (Mode Shape Vibration) มากขึ้นเนื่องจากรูปแบบการใช้งานมีการเคลื่อนไหวและการสั่นสะเทือนเข้ามาเกี่ยวข้องมากขึ้นเนื่องจากวัสดุคอมโพสิตมีคุณสมบัติเฉพาะตัวจากการออกแบบเช่นการจัดซ้อนชั้นของแผ่นลามิเนต (Stacking Sequence) แนวการเรียงเส้นใย (Fiber Orientation) ซึ่งคุณสมบัตินี้จะมีผลต่อความถี่ธรรมชาติ (Natural Frequency) ต่างกันไป งานวิจัยนี้ได้ศึกษารูปแบบการสั่นสะเทือน (Mode Shape) ของคานลามิเนตหน้าตัดคงที่ที่มีสัดส่วนความกว้างต่อความยาว(Slender Ratio; a/L) ต่างกันและสัดส่วนโมดูลัส(Modulus Ratio; E_1/E_2)ต่างกันเพื่อศึกษาอิทธิพลของตัวแปรทั้งสองต่อรูปแบบการสั่นสะเทือนที่เกิดขึ้นโดยใช้ทฤษฎี Classical Laminated Plate Theory เปรียบเทียบกับการวิเคราะห์แบบจำลองจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Analysis; FEA) ผลการศึกษาแสดงข้อจำกัดของการใช้ทฤษฎีCLPT ซึ่งพัฒนามาจากโครงสร้างแบบแผ่นแบนในการวิเคราะห์รูปแบบการสั่นของคานคอมโพสิตซึ่งทฤษฎีจะไม่สามารถใช้งานได้ดีในกรณีที่สัดส่วนความกว้างต่อความยาวมีค่าน้อยลง ซึ่งข้อจำกัดทางทฤษฎีนี้ ชี้ให้เห็นว่าการวิเคราะห์คานยื่นคอมโพสิตที่มีหน้าตัดซับซ้อนขึ้นต่อไปควรทำด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

คำหลัก: วัสดุคอมโพสิต ลามิเนต ความถี่ธรรมชาติ คานยื่น สัดส่วนโมดูลัส สัดส่วนความกว้างต่อความยาว

Abstract

Composite materials are used wildly in industry because of stiffness per mass is high and ability to be adapted to various components for example in airplane or automobile. In the last decade research interest is interested in vibration and mode shapes because many components are subjected that mode shape vibration (natural frequency) is affected by properties of the laminated composite. The work focus on mode shapes vibration of cantilever beams (constant cross-sectional area) is the topic of this research. Influence of Modulus ratio (E_1/E_2) and Slenderness ratio (a/L) which affects the vibration behavior is studied. Classical Laminated Plated Theory (CLPT) is the calculation method for natural vibration in this research to compare with model simulation using Finite Element Analysis (FEA). Results of the natural vibration by CLPT theory which is based on plate theory show limitations when the slenderness ratio increases. This limitation of CLPT theory suggests that the analysis of complicated laminated composite beam model should be performed with FEA.

Keywords: Composite Material, Laminate, Natural Frequency, Mode Shape Vibration, Slender Ratio, Modulus Ratio

1. บทนำ

ความถี่ธรรมชาติเป็นคุณสมบัติเฉพาะตัวในแต่ละวัสดุ ซึ่งคุณสมบัติของวัสดุที่ต่างกันเช่น น้ำหนัก ความหนาแน่น (Density, ρ) รูปทรงเรขาคณิต (Geometry) ค่าโมดูลัส (Modulus) ลักษณะการจับยึดของโครงสร้างย่อมมีผลต่อความถี่ธรรมชาติของวัตถุนั้นๆ ความน่าสนใจของความถี่ธรรมชาติคือ เมื่อวัตถุใดๆได้รับแรงสั่นสะเทือนเทียบเท่ากับความถี่ธรรมชาติของวัตถุนั้นจะเพิ่มการสั่นสะเทือนแบบการสั่นพ้อง (resonance) และหากมีการสั่นด้วยค่าความถี่ธรรมชาติของวัตถุนั้นเป็นเวลานาน โดยแอมพลิจูดที่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ จะทำให้ค่าการสั่นสะเทือนนั้นเพิ่มมากขึ้นและเป็นการเพิ่มความเครียด (stress;σ) ในตัววัตถุนั้นๆด้วย ซึ่งอาจทำให้วัตถุนั้นมีความเสียหายได้

ทศวรรษที่ผ่านมา มีการใช้แผ่นลามิเนตเป็นวัสดุโครงสร้างอย่างแพร่หลาย ในส่วนประกอบปีกเครื่องบิน ใบพัดเฮลิคอปเตอร์ ชิ้นส่วนของเรือ หรือกระทั่งชิ้นส่วนรถยนต์และอุปกรณ์กีฬา เนื่องจากสามารถออกแบบชิ้นส่วนให้มีความแข็งแรงแต่มีน้ำหนักเบา โดยสามารถลดความหนาของวัสดุแต่ยังคงทนต่อการใช้งาน ซึ่งเนื่องมาจากคุณสมบัติในการซ้อนชั้นของแผ่นลามิเนต ได้แก่ แนวการวางเส้นใย (fiber orientation) และลำดับการเรียงชั้น (stacking sequence) สามารถประยุกต์ให้ชิ้นงานนั้นๆมีประสิทธิภาพด้านความแข็งแรงมากขึ้นต่อน้ำหนักที่ลดน้อยลง

งานวิจัยในระยะแรกเริ่มนิยมศึกษาในรูปแบบ Static mode ที่มีผลต่อแผ่นลามิเนต กระทั่งเมื่อวัสดุลามิเนตมีการใช้งานในรูปแบบ Dynamic Mode มากขึ้น การศึกษาที่เกี่ยวข้องกับการสั่นสะเทือนจึงได้มีการพัฒนาและวิเคราะห์มากขึ้น รวมถึงการวิเคราะห์ความแข็งแรง ของลามิเนตจาก Stiffness Matrices จากลามิเนตแต่ละประเภท ในปี 1991 Dcwcv H. liode [5] ได้ศึกษาผลของ Stiffness Matrices (ABD matrices) เพื่อทำนายความถี่ธรรมชาติของคานคอมโพสิต ในหน้าตัดที่ต่างกันคือ Box-Beam และ Circular-Beam โดยมีนัยให้มีความใกล้เคียงกับชิ้นส่วนของเครื่องบิน ข้อสรุปของงานวิจัยแสดงให้เห็นว่า การทำนายความถี่ธรรมชาติจาก Stiffnesses Matrices เพื่อคาดการณ์ลักษณะการสั่นสะเทือนของคานไม่สามารถทำได้ ซึ่งสิ่งที่มีอิทธิพลมากต่อความถี่ธรรมชาตินั้นคือการวางแนวเส้นใย และลำดับการเรียงชั้นของแผ่นลามิเนต ในปี 1998 Jaehong Lee[6]ได้ศึกษาการแยกชั้น (delamination) ของคานลามิเนตโดยการสั่นสะเทือน และได้เริ่มศึกษาสัดส่วนด้านกว้างต่อความยาว ที่มีผลต่อการสั่นสะเทือนและแยกชั้นของลามิเนตในคานในวัสดุไอโซโทรปิค หลังจากนั้นปี 2008 L. Jun et al.[7] ได้ศึกษาการสั่นสะเทือนของคานโดยใช้ Third-order shear deformation theory (TSDT) และสรุปได้ว่าการใช้ทฤษฎี First-order shear deformation theory (FSDT) มีค่าต่างกันน้อยกว่า 0.1% ในกรณีความถี่ธรรมชาติ 1st Mode และต่างกันเพียง 2 % ในโหมดถัดไป ส่วนผลการคำนวณระหว่างการคิดค่า Poisson's Ratio และไม่คิดจะทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติต่างกัน 16% ปี 2013 Shiuh-Chuan Her[11] ได้ศึกษา การสั่นสะเทือนโดย Piezoelectric Actuators และวิเคราะห์ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เปรียบเทียบกับ CLPT ซึ่งพบว่ามีค่าต่างกันกันไม่เกิน 1% ในโหมดที่ 1- 3

2. วัตถุประสงค์และขอบเขต

งานวิจัยนี้ได้ศึกษารูปแบบการสั่นสะเทือน (Mode Shape) ของแผ่นลามิเนตที่มีสัดส่วนความกว้างต่อความยาว (Aspect Ratio; a/b) ต่างกัน โดยใช้ทฤษฎี CLPT และเปรียบเทียบผลการคำนวณกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์แบบจำลองจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อวิเคราะห์ขอบเขตของความแม่นยำในการใช้ทฤษฎีในการวิเคราะห์Mode Shape เมื่อAspect Ratio; a/b ต่างกัน และศึกษาคานลามิเนตหน้าตัดคงที่มีสัดส่วนความกว้างต่อความยาว (Slenderness Ratio; a/L) ต่างกันและสัดส่วนโมดูลัส (Modulus Ratio; E_1/E_2) ต่างกันเพื่อศึกษาอิทธิพลของตัวแปรทั้งสองต่อรูปร่าง Mode Shape ที่เกิดขึ้นโดยวิเคราะห์แบบจำลองจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

โปรแกรม MSC. Patran/Nastran ถูกใช้ในการวิเคราะห์แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เป็นแบบจำลองของแผ่นลามิเนต และคานลามิเนต ซึ่งกำหนดให้คุณสมบัติของลามิเนตทั้งสองชนิดเป็นแบบออโธโทรปิค (Orthotropic Material)

แผ่นลามิเนตจะมีขนาด 200 mm. x 200 mm. มีการเรียงชั้นในรูปแบบสมมาตร $[0°/90°/0°/90°/0°]_s$ จำนวน 10 ชั้น มีความหนารวมทั้งหมดเท่ากับ 2.69 mm. โดยกำหนดให้แต่ละชั้นมีความหนาเท่ากัน และจับยึดทุกด้านอย่างง่าย (Simply-Supported)

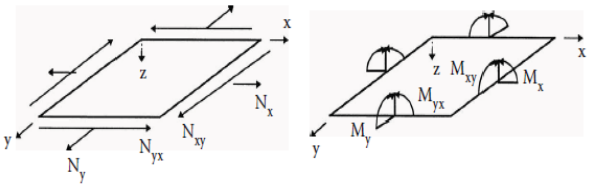
คานลามิเนต มีความกว้าง (a) คงที่เท่ากับ 200 mm. และให้มีค่าความยาว (L) ที่เปลี่ยนไป คือ 1m. 1.5m. 2m และ 2.5 m. กำหนดคุณสมบัติ จำนวนชั้น การเรียงชั้น และความหนา เช่นเดียวกับแผ่นลามิเนต โดยคานเป็นแบบจับยึดปลายด้านหนึ่ง และปล่อยอิสระทุกด้าน (Cantilever Beam; CFFF)

3. ทฤษฎีและการคำนวณ

3.1 Classical Laminate Plate Theory (CLPT)

CLPT เป็นทฤษฎีที่พิจารณาเรื่องของการโมเมนท์การดัด (Bending Moment) [8] ที่มีผลต่อแผ่นลามิเนต โดยมีสมมุติฐานเบื้องต้นคือ

$$M_y = M_{xy} = 0 \qquad (1)$$



รูปที่ 1 ผลลัพธ์ของแรงและโมเมนต์ (Resultant forces and moments of laminate) [10]

สมการของแผ่นลามิเนตสามมารถเขียนในรูปแบบสมการ Hook's low คือ

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (2)$$

โดยแทนค่าในรูปแบบ Constitutive Equations สำหรับแผ่นลามิเนตดังนี้

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \qquad (3)$$

และ

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz \qquad (4)$$

รูปแบบ ABD Matrices ได้ดังนี้ (Stiffness Matrices)

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{16} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{16} & B_{22} & B_{26} & D_{16} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \qquad (5)$$

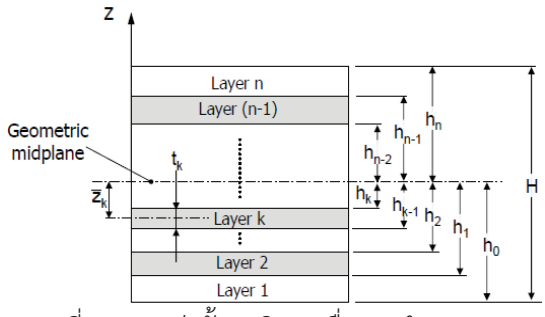
เมื่อย้ายข้างสมการให้อยู่ในรูปของ strain (ε) และ รัศมีความโค้ง (k)จะได้สมการในรูปเต็มดังนี้

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} & B'_{11} & B_{12} & B'_{16} \\ A'_{12} & A'_{22} & A'_{26} & B'_{16} & B'_{22} & B'_{26} \\ A'_{16} & A'_{26} & A'_{66} & B'_{16} & B'_{26} & B'_{66} \\ C'_{11} & C'_{12} & C'_{16} & D'_{11} & D'_{12} & D'_{16} \\ C'_{12} & C'_{22} & C'_{26} & D'_{12} & D'_{22} & D'_{26} \\ C'_{16} & B'_{26} & B'_{66} & D'_{16} & D'_{26} & D'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

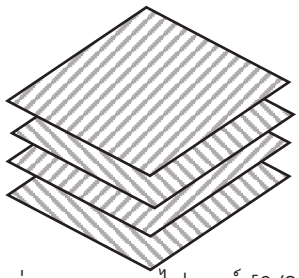
ซึ่ง fully inverted form ในสมการที่ 6 มักเป็นรูปแบบส่วนใหญ่ของสมการที่เป็นส่วนประกอบลามิเนต (laminate constitutive equations) [12] เพื่อใช้ในการคำนวณการสั่นสะเทือนในขั้นตอนต่อไป

3.2 การคำนวณความถี่ธรรมชาติของแผ่นลามิเนต โดยใช้ทฤษฎี CLPT

การคำนวณความถี่ธรรมชาติของแผ่นลามิเนตนั้น จะเป็นการคำนวณแบบรวมเป็น 1ชั้น (Single Layer) คือหาคุณสมบัติรวมของลามิเนตทั้งแผ่นเป็นชั้นเดียว โดยใช้ค่าคุณสมบัติ E_1 E_2 ν_{12} และ G_{12} ของวัสดุมากคำนวณเพื่อหาค่าความแข็งแรงของแต่ละชั้น ($[Q]_{1,2}$, Layer Stiffness) หลังจากนั้น จึงคำนวณความแข็งแรง โดยใช้มุมของแต่ละชั้น (θ_k) เพื่อหาค่าความแข็งแรงของวัสดุที่ทำมุมθ_k กับแกน x-y ($[\bar{Q}]_k$) หลังจากนั้นจะใช้ค่า $[\bar{Q}]_k$ คำนวณหา ABD Matrices จากระยะชั้นของลามิเนตตามแนวแกน z (z_k)



รูปที่ 2 การแบ่งชั้นลามิเนตเพื่อการคำนวณ [1]



รูปที่ 3 ตัวอย่างการวางมุมไฟเบอร์ [0/90/0/90]

โดยคำนวณเมตริกซ์ ABD จากสมการ

$$[A] = \sum_{k=1}^{n}[\bar{Q}]_k (z_k - z_{k-1}) \quad (7)$$

$$[B] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\bar{Q}]_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (8)$$

$$[D] = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}[\bar{Q}]_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (9)$$

คำนวณค่า Laminate extensional compliance matrix ($[a]_{xy}$) จากสมการด้านล่าง

$$[a]_{xy} = [A]^{-1} \quad (10)$$

ใช้ทฤษฎี Single layer เพื่อหาคุณสมบัติแบบเฉลี่ยรวมทุกชั้นของลามิเนตคือ Modulus ในแนวแกน x-y (E_x, E_y) Poisson Ratio; ν และค่า Shear Modulus (G_{xy}) โดยใช้ความหนาทั้งหมดของแผ่นวัสดุ (t)

$$E_x = \frac{1}{ta_{11}} \quad (11)$$

$$E_y = \frac{1}{ta_{22}} \quad (12)$$

$$G_{xy} = \frac{1}{ta_{66}} \quad (13)$$

$$\nu = \frac{-a_{11}}{a_{12}} \quad (14)$$

คำนวณเมตริกซ์ D ใหม่โดยคุณสมบัติจากสมการที่ 11 – 14 เพื่อคำนวณค่า แทนค่า D_{ij} ลงในสมการที่ (ด้านล่าง) เพื่อคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติ ω_{mn} (rad/sec)

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^2}{\sqrt{\rho}}\left[D_{11}\left[\frac{m}{a}\right]^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\left[\frac{m}{a}\right]^2\left[\frac{n}{b}\right]^2 + D_{22}\left[\frac{n}{b}\right]^4\right] \quad (15)$$

$$f_{mn} = \frac{\omega_{mn}}{2\pi} \quad (16)$$

ค่าความถี่ธรรมธรรมชาติในหน่วยเฮิร์ต (Hz) เท่ากับ f_{mn} โดยที่ m,n = 1,2,3,... และ a,b คือความยาวตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

3.3 แบบจำลองวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

การจำลองในงานวิจัยนี้ เป็นการสร้างแบบจำลองโดยใช้โปรแกรม Patran/Nastran ในรูปแบบ 2 มิติ คือ สร้างแบบจำลองด้วยความกว้างและยาวตามขนาดที่กำหนด และคุณสมบัติของวัสดุเป็นแบบ Orthotropic และสร้างคุณสมบัติแผ่นลามิเนตโดยความหนาของแบบจำลองเป็นแบบ shell และกำหนดรูปแบบการวางแผ่นลามิเนตเป็นแบบ Simply-support และ Cantilever ในแบบจำลองคาน และวิเคราะห์ความถี่ธรรมชาติในโหมดที่ 1 ถึง 10

4. ผลการคำนวณความถี่ธรรมชาติของแผ่นลามิเนตโดยใช้ทฤษฎี CLPT และไฟไนต์เอลิเมนต์

งานวิจัยนี้เลือกใช้คุณสมบัติแผ่นลามิเนตที่ทำจากวัสดุ T300/934 CFRP โดยมีคุณสมบัติดังนี้

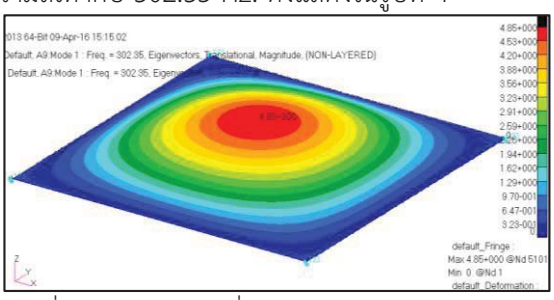
E_1 = 120 GPa, E_2 =7.9 GPa, G_{12} = 5.5 GPa,

ρ = 1580 kg/m3, ν_{12} = 0.33

ขนาด 200 mm. x 200 mm. ซึ่งมีการเรียงชั้นในรูปแบบสมมาตร$[0°/90°/0°/90°/0°]_s$ จำนวน 10 ชั้น มีความหนาทั้งหมดเท่ากับ 2.69 mm. โดยกำหนดให้แต่ละชั้นมีความหนาเท่ากัน และทุกด้านวางในแบบ Simply-Support จะได้เมตริกซ์ D เพื่อใช้ในคำนวณและแทนค่าในสมการ (15) ดังนี้

$$D = \begin{bmatrix} 109.766 & 3.867 & 0 \\ 3.867 & 98.937 & 0 \\ 0 & 0 & 8.922 \end{bmatrix}$$

ดังนั้นค่าความถี่ธรรมชาติจากวิธี CLPT เท่ากับ 302.46 Hz. และ เมื่อวิเคราะห์ด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ จะได้ค่าความถี่เท่ากับ 302.35 Hz. ดังแสดงในรูปที่ 4



รูปที่ 4 รูปแบบความถี่ธรรมชาติใน 1st mode

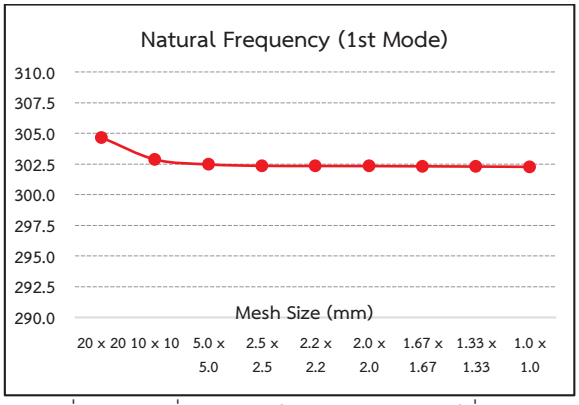
δ_{max} = 4.85 mm.

4.1 ขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสม (Mesh size Convergence)

การแบ่งขนาดของเอลิเมนต์ ที่เหมาะสมต่อการหาค่าความถี่ธรรมชาตินั้น ผู้วิจัยแบ่งขนาดเอลิเมนต์ จากขนาด 20 mm. - 1 mm. ผลของขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมต่อการหาค่าความถี่ธรรมชาติที่คือ 2.5 mm.

เนื่องจากค่าความถี่จะมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาในขนาดที่ต่ำกว่า 2.5 mm. รวมถึงค่าความถี่ธรรมชาติใกล้เคียงกับการคำนวณโดยวิธี CLPT ที่ผู้วิจัยคำนวณได้

นอกจากนั้นค่าความถี่ธรรมชาติในขนาดเอลิเมนต์ 2.5 mm. ยังมีค่าใกล้เคียงกับงานวิจัยอื่นๆเช่น Whitney[4] ซึ่งคำนวณโดยวิธี CLPT ค่าความถี่เท่ากับ 303.08 Hz.และการวิเคราะห์ของของ M.B.V Reddy[4] ซึ่งวิเคราะห์ในรูปแบบ FEA ด้วยโปรแกรม Ansys ค่าความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 302.05 Hz.



รูปที่ 5 ความถี่ธรรมชาติในขนาดเอลิเมนต์ที่ต่างกัน

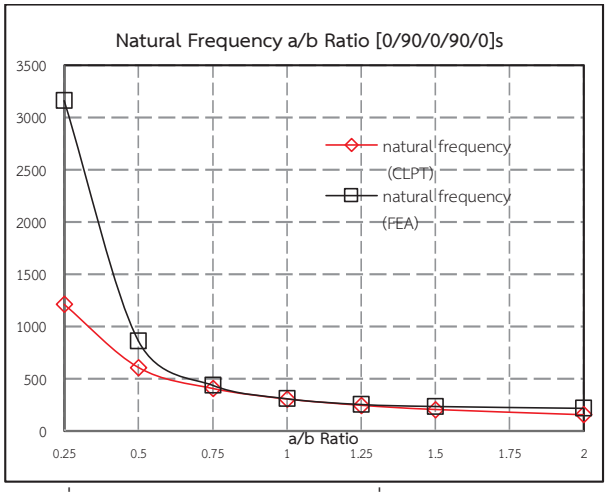
4.2 ผลการคำนวณค่าความถี่ธรรมชาติในกรณีสัดส่วนความกว้างต่อความยาวต่างกัน (a/b; Aspect Ratio)

ผลการคำนวณความถี่ธรรมชาติโดยใช้ทฤษฎี CLPT และไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่ Aspect Ratio(a/b) ต่างกันโดย a และbคือความยาวในแนวแกน x และ y ตามลำดับ กำหนดbมีค่าคงที่เท่ากับ200 mm. จากตารางที่ 1 และ รูปที่ 6 พบว่าความถี่จากทฤษฎีจะมีค่าใกล้เคียงกับค่าจากไฟไนต์เอลิเมนต์ที่สุดเมื่อ a/b =1และจะมีความแตกต่างกันไม่เกิน10%เมื่อสัดส่วน0.75< a/b<1.25แต่ในกรณีที่a และb ต่างกันเกินกว่า25%ผลการคำนวณของทั้งสองวิธีก็จะมีความแตกต่างมากขึ้น

ดังเห็นได้ว่าในงานวิจัยทั่วไป การเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติในการคำนวณ กับการวิเคราะห์โดย FEA หรือการใช้ทดลองมักจะกำหนดขนาด a/b = 1 หรือค่า aspect ratio ต่างกันไม่เกิน 25% เช่น J. P. Talbot and J. Woodhouse [3] ซึ่งเป็นงานวิจัยเพื่อหาค่าการสั่นสะเทือนตามทฤษฎีCLPT เปรียบเทียบผลกับการทดลองโดยใช้แผ่นลามิเนต 3 ขนาดคือ 178 X 176 X 0.95 mm. 230 X 230 X 1.07 mm และ 126 X 108 X 0.92 mm. หรือในกรณีงานของ Khaldoon F. Brethee [4] พิจารณาความถี่ธรรมชาติของลามิเนต แบบมีการตัดตรงกลางแผ่นใช้แผ่นลามิเนตแบบสี่เหลี่ยมจัตุรัส 25 X 25 mm. แต่เปลี่ยนแปลงขนาดของความหนา 0.25, 1.25 และ 2.5 mm. คำนวณในทฤษฎี CLPT เพื่อลดค่าความผิดพลาดจากขนาดแผ่นด้าน a และ b และวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ รวมถึง Shiuh-Chuan H. [11] ที่ใช้ขนาด a=300 mm. และ b=380 mm.ในการศึกษาความถี่ธรรมชาติโดย CLPT และวิเคราะห์ด้วยไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 1 ค่าความถี่ธรรมชาติในสัดส่วนกว้างยาวต่างกัน

a/b Ratio	CLPT Natural frequency (Hz)	FEA Natural frequency (Hz)	% Error
2.00	151.23	212.88	29.0%
1.50	201.64	230.55	12.5%
1.25	241.96	249.51	3.0%
1.00	302.46	304.67	0.7%
0.75	403.27	433.27	6.9%
0.50	604.91	858.21	29.5%
0.25	1,209.82	3,156.03	61.7%



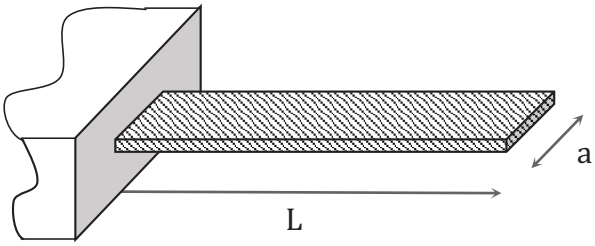
รูปที่6 กราฟเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติในโดยวิธี CLPTและไฟไนต์เอลิเมนต์

จากผลของการคำนวณและงานวิจัยที่ได้กล่าวถึง จึงเชื่อได้ว่าทฤษฎี CLPT ไม่เหมาะสมกับการคำนวณแผ่นลามิเนตที่มีสัดส่วน a/b ต่างกันมากเกิน 25%

ดังนั้นการคำนวณชิ้นงานที่มีรูปร่างเรียว (Slender) เช่นคานลามิเนต จึงควรใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในการทำนายค่าความถี่ธรรมชาติ และรูปแบบการสั่นสะเทือน

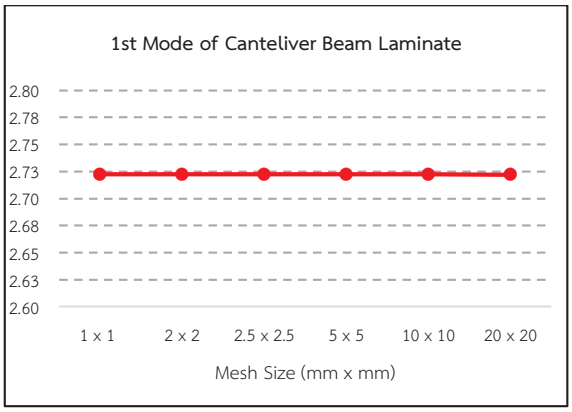
4.3 การวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติของคาน

การวิเคราะห์ค่าความถี่ธรรมชาติของคาน จะใช้คุณสมบัติของวัสดุในรูปแบบเดียวกับแผ่นลามิเนต แต่จะมีสัดส่วนความกว้าง และความยาวที่เปลี่ยนไปตามรูปแบบของคาน โดยจะเป็นการจำลองคานในรูปแบบ 2 มิติ (2 Dimension) มีการจับยึดด้านปลายหนึ่งด้าน และเป็นอิสระในทุกด้านที่เหลือ (Cantilever Beam ;CFFF) มีขนาดความยาว (L) แบ่งเป็น 4 แบบ โดยกำหนดให้ความกว้าง (a) มีค่าคงที่ 200 mm และความยาวเท่ากับ 1m. 1.5 m. 2m. และ 2.5 m.

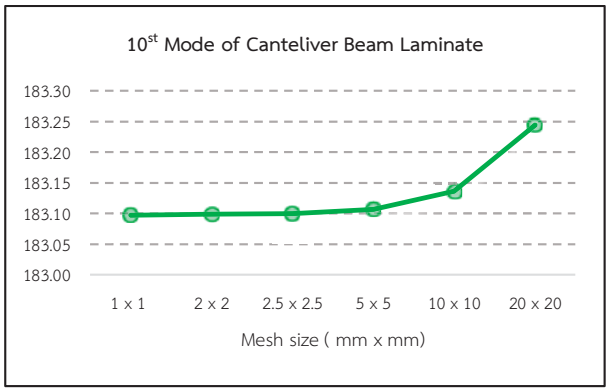


รูปที่ 7 คานยื่น (Cantilever Laminate Beam)

การแบ่งขนาดเอลิเมนต์ที่เหมาะสมต่อแบบจำลองคานยื่นมีค่าเท่ากับแบบจำลองของแผ่นลามิเนตโดยขนาดที่เหมาะสมของเอลิเมนต์เท่ากับ 2.5 mm แต่ไม่สามารถวิเคราะห์ได้ในค่าความถี่ธรรมชาติ 1st – 3rd Mode เนื่องจากค่าความถี่ธรรมชาติแทบจะไม่แต่แตกกันเลยใน mode แรก (รูปที่ 8) แต่จะมีความแตกต่างเล็กน้อยใน 4th -7th Mode และสูงขึ้นเรื่อยใน 8th -10th Mode โดยเฉพาะอย่างยิ่งใน 10th Mode จะระบุได้ชัดเจนถึงค่าความเหมาะสมของขนาดเอลิเมนต์ที่เท่ากับ2.5 mm. ดังแสดงในรูปที่ 9



รูปที่ 8 ความถี่ธรรมชาติ 1st Mode ต่อขนาดเอลิเมนต์



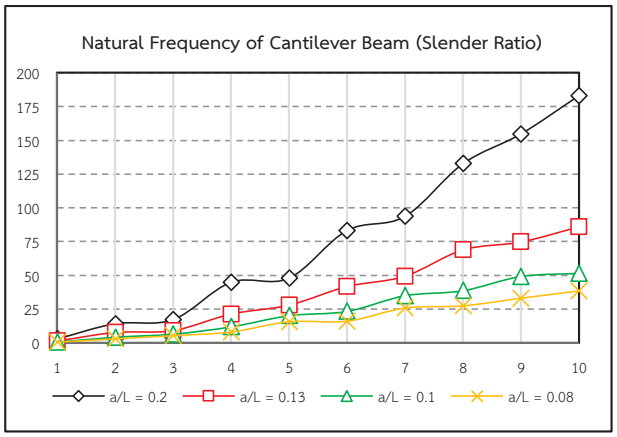
รูปที่ 9 ความถี่ธรรมชาติ 10th Mode ต่อขนาดเอลิเมนต์

4.3.1 การสั่นสะเทือนของคาน ในกรณีสัดส่วนความกว้างต่อความยาว (a/L) ต่างกัน

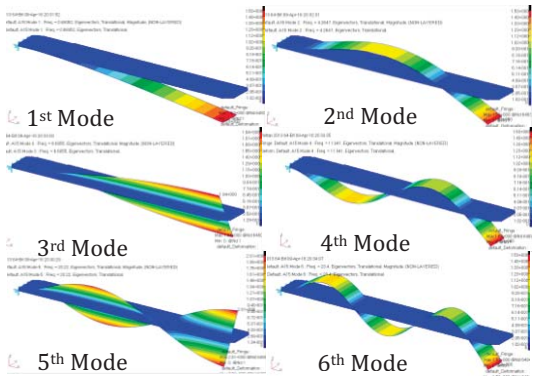
เมื่อความยาวของคานมีค่าเปลี่ยนไป โดยความกว้างมีค่าคงที่ 200 mm และความยาวเท่ากับ 1m. 1.5 m. 2m. และ 2.5 m. ค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าลดลงเมื่อสัดส่วนความกว้างต่อความยาวคาน(a/l) มีค่าลดลง ดังตารางที่ 2 และรูปที่ 10

ตารางที่ 2 ค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อ a/Lต่างกัน

Natural frequency of Cantilever Beam (Hz)				
Mode Shape	a/L = 0.2 L = 1 m.	a/L = 0.13 L = 1.5 m.	a/L = 0.1 L = 2 m.	a/L = 0.08 L = 2.5 m.
1st	2.72	1.21	0.68	0.45
2nd	14.00	7.58	4.26	2.83
3rd	17.06	8.98	6.60	5.23
4th	44.77	21.23	11.94	7.92
5th	47.77	27.84	20.22	15.51
6th	83.15	41.60	23.40	15.93
7th	93.60	49.28	34.99	25.65
8th	132.67	68.77	38.68	27.28
9th	154.74	74.62	49.24	32.91
10th	183.10	85.80	51.57	38.31



รูปที่ 10 ค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อ slender ratio ต่างกัน

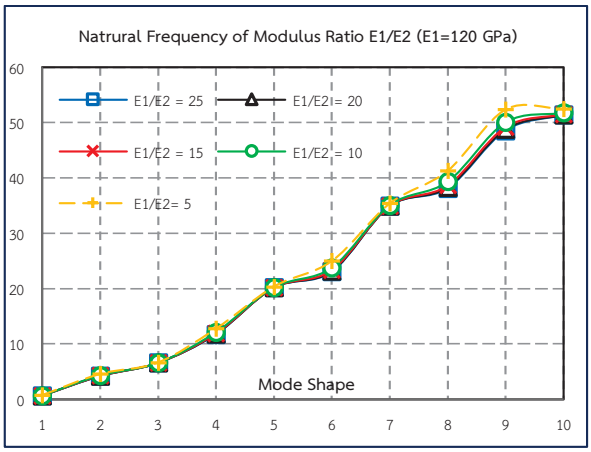


รูป 11 ตัวอย่าง Mode Shape คานสัดส่วน a/ L = 0.1

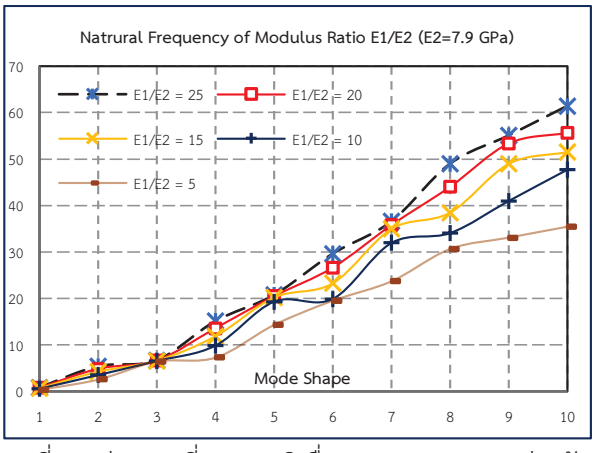
4.3.2 การสั่นสะเทือนของคาน กรณีสัดส่วนโมดูลัส (E_1/E_2) ต่างกัน

การวิเคราะห์ค่าการสั่นสะเทือนตามธรรมชาติ โดยศึกษาอิทธิพลของ Modulus Ratio; E_1/E_2 กำหนดให้ กรณีที่1 E_1 มีค่าคงที่เท่ากับ 120 GPa โดย วิเคราะห์ใน 4 รูปแบบคือ E_1/E_2 = 20, 15, 10, 5 และ 2.5 และกรณีที่ 2 กำหนดให้ E2 มีค่าคงที่เท่ากับ 7.9 GPa และให้ E_1/E_2 = 25, 22.5, 20, 17.5, 15, 12.5 และ 10 โดยใช้แบบจำลองคานที่มีความกว้างเท่ากับ 200 mm. ความยาว 2 m.

กรณีที่ 1 เมื่อกำหนดให้ E_1 มีค่าคงที่ ค่าความถี่ธรรมชาติจะสูงขึ้นตามลับดับ Mode Shape ที่เพิ่มขึ้นดังรูปที่ 12 โดยที่ Mode Shape เดียวกัน เมื่อ Modulus Ratio ลดลงหมายถึงคานแข็งเกร็งขึ้น ค่าความถี่ธรรมชาติก็จะสูงขึ้นด้วย กรณีที่ 2 กำหนดให้ E_2 มีค่าคงที่ ค่าความถี่ธรรมชาติจะเพิ่มขึ้นตามลับดับ Mode Shape ดังรูปที่ 13 โดยเมื่อ Modulus Ratio เพิ่มขึ้นหมายถึงคานจะมีความแข็งเกร็งมากขึ้นด้วย ดังนั้นค่าความถี่ธรรมชาติก็จะสูงขึ้นด้วย



รูปที่ 12 ค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อModulus Ratio ต่างกัน โดยกำหนด E_1 = 120 GPa



รูปที่ 13 ค่าความถี่ธรรมชาติเมื่อModulus Ratio ต่างกัน โดยกำหนด E_2 = 7.9 GPa

5. สรุปและวิเคราะห์ผล

อิทธิพลของรูปร่างของแผ่นลามิเนตต่อความถี่ธรรมชาตินั้น สรุปได้ว่าในกรณีของการคำนวณด้วยทฤษฎี CLPT หากความกว้างต่อความยาว (a/b) มีค่าระหว่าง 0.75 – 1.25 ค่าความถี่ธรรมชาติสามารถคำนวณได้ด้วยทฤษฎี โดยค่าที่ได้จะมีค่าใกล้เคียงกับวิธีการคำนวณด้วยวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยค่าความแตกต่าง จะไม่เกิน 10% และค่าความถี่ธรรมชาติจะมีค่าใกล้เคียงกันที่สุดเมื่อแผ่นลามิเนตเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส (a/b = 1) แต่หาก a และ b ต่างกันเกิน 25 % ค่าความแม่นยำของคำตอบจะไม่สามารถคำนวณได้ด้วยทฤษฎี CLPT

สำหรับคานคอมโพสิตในรูปแบบคานยื่น สัดส่วนความกว้างต่อความยาว (a/L) มีผลต่อความถี่ธรรมชาติ คือ เมื่อสัดส่วน a/L ลดลง(คานยาวขึ้น) จะมีผลให้ค่าความถี่ธรรมชาติลดลงในทุก Mode Shape กรณีศึกษาของ a/L = 0.13 - 0.08 มีค่าความถี่ธรรมชาติลดลง 42% - 83% เมื่อเทียบกับ a/L = 0.2

อิทธิพลของ Modulus Ratio ที่มีผลต่อค่าความถี่ธรรมชาตินั้นปัจจัยหลักมากจากความแข็งเกร็งของแผ่นลามิเนต

กรณีที่1 Modulus Ratio ลดลงหมายถึงแผ่นลามิเนตมีความแข็งเกร็งมากขึ้น ส่วนในกรณีที่ 2 Modulus Ratio เพิ่มขึ้นหมายถึงแผ่นลามิเนต มีความแข็งเกร็งมากขึ้น และความแข็งเกร็งที่เพิ่มขึ้นทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติของคานเพิ่มขึ้นในทุกๆ Mode Shape นอกจากนี้ยังพบว่าค่า E_1 จะเป็นตัวแปรหลักที่มีผลต่อการเพิ่มขึ้นของความถี่ธรรมชาติ ดังจะเห็นได้จากรูปที่ 13 ซึ่ง Modulus Ratio ที่เพิ่มขึ้น เกิดจากการเพิ่มขึ้นของค่า E_1 การ

กระจายตัวของค่าความถี่ธรรมชาติของแต่ละ Mode Shape จะมองเห็นได้ชัดเจนกว่ากรณีที่ 1 ที่ค่า E_2 มีการเปลี่ยนแปลงดังในรูปที่ 12

นอกจากนั้นผู้วิจัยเห็นว่าแนวทางการศึกษาและพัฒนาควรศึกษาปัจจัยด้านอื่นๆที่มีผลต่อความถี่ธรรมชาติ เช่น Stacking Sequence , Fiber Orientation สำหรับคานที่มี หน้าตัดซับซ้อนขึ้นเช่น หน้าตัดแบบกล่องสี่เหลี่ยม (Box-Beam) หรือ แบบตัวไอ (I-Beam) เพื่อพัฒนาการออกแบบคานคอมโพสิตให้มีความถี่ธรรมชาติไม่ตรงกับลักษณะการสั่นสะเทือนของสภาพแวดล้อม หรือเพื่อลดการสั่นสะเทือนในขณะทำงานที่ความถี่นั้นๆ

6. เอกสารอ้างอิง

[1] O. Sevecek, M. Pletz2, R. Bermejo, P. Supancic1 (2011), Analytical Stress-Strain analysis of the laminates with orthotropic (isotropic) layers using Classical Laminate Theory Comparison with FEA, May 2011.

[2] Mutra Raja Sekhara Reddy, Bathini Sidda Reddy, Vanguru Nageswara Reddy, Surisetty Sreenivasulu (2012) , Prediction of Natural Frequency of Laminated Composite Plates Using Artificial Neural Networks, Engineering, 2012; 4, May 2012, pp.329-337

[3] J. P. Talbot and J. Woodhouse (1997) ,The vibration damping of laminated plates, Cambridge University Engineering Department, Composites Part A 28A , May 1997, pp.1007-1012,

[4] Khaldoon F. Brethee (2009), Free Vibration Analysis of a Symmetric and Anti-Symmietric Laminated Composite Plate with a Cutout at the center, Mechanical Engineering, University of Anbar, Al-Qadisiya Journal For Engineering Sciences; Vol2, 2009

[5] Dewey H. Hodges, Ali R. Atilgan, Mark V. Fulton, Lawrence W. Rehfield (2009), Free-Vibration Analysis of Composite Beams, Georgia Institute of Technology, July1991

[6] Jaehong Lee (1998), Free Vibration of delaminate composite beam, Department of Architectural Engineering, Sejong University, Seoul, December 1998, Computers and Structures 74 (2000) pp.121-129

[7] Li Jun, Li Xiaobin, Hua Hongxing (2008), Free vibration analysis of third-order shear deformable composite beams using dynamic stiffness method, Arch Appl Mech (2009) 79:1083–1098

[11] A.T.Nettles (1994), Basic Mechanics of Laminated Composite plates, NASA Reference Publication, Marshall Space Flight Center , Alabama, October 1994

[12] J. M. Whitney (1972) , On The Anaylysis of Anisotropic Rectangular Plate, Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio ,August 1972

[8] J.N. Reddy (2004). Machanics of Laminated Composite Plante and Shells Theory and Analysis, 2nd edition, ISBN: 0-8493-1592-1, CRC Press LLC, Florida.

[9] Isaac M. Daniel and Ori Ishai (2006), Engineering Mechanics of Composite Materials, 2nd Edition, Newyork Oxford, Oxford University

[10] Kaw, Autar K.(2006), Mechanics of composite materials, 2nd Edition,Taylor & Francis Group, LLC CRC Press.

[11] Shiuh-Chuan Her, Chi-Sheng Lin(2013), Vibration Analysis of Composite Laminate Plate Excited by Piezoelectric Actuators, Sensors 2013, ;13, pp.2997-3013