

## การหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง Maximum Velocity of a Racing Car

ทิววัชร วีระเกล้า<sup>1</sup> ยศศักดิ์ สายสนิ<sup>2</sup>

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ถ.รังสิต-นครนายก อ.องครักษ์ จ.นครนายก 26120

โทร 0-37322625-40 โทรสาร 0- 37322-616 E-mail: tawiwat@hotmail.com<sup>1</sup>, s\_yotsak@hotmail.com<sup>2</sup>

Tawiwat Veeraklaew<sup>1</sup> Yotsak Saisanit<sup>2</sup>

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Srinakharinwirot University

Rungsit- Nakhon Nayok Road, Ongkharak District, Nakhon Nayok 26120, Thailand.

Tel: 0-37322625-40 Fax: 0- 37322-616 E-mail: tawiwat@hotmail.com<sup>1</sup>, s\_yotsak@hotmail.com<sup>2</sup>

### บทคัดย่อ

บทความนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมกับรถที่แล่นในสนามแข่งขันที่กำหนด โดยใช้วิธีมินิมัมไทม์ ออปติไมซ์เซชัน (Minimum time optimization) หาคำตอบจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การเคลื่อนที่อย่างง่ายของรถแข่ง ซึ่งมีเงื่อนไขบังคับเป็นสมการกำหนดเส้นทางวงรีรูปทรงเรขาคณิต พร้อมทั้งกำหนดช่วงขอบเขตแรงขับเคลื่อนและแรงเบรกเป็นค่าสูงสุดและต่ำสุดตามลำดับ

บทความนี้เป็นประโยชน์อย่างมากต่อนักแข่งในการกำหนดช่วงจังหวะในการใช้ความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมในแต่ละช่วงของสนามแข่งขัน เพราะรู้ค่าความเร็วสูงสุดที่ปลอดภัยในแต่ละช่วงของสนามแข่งขันแล้ว โดยไม่ต้องอาศัยประสบการณ์มาตัดสินใจเพียงอย่างเดียว อีกทั้งยังเป็นการสร้างความมั่นใจให้กับนักขับอีกทางหนึ่ง

### Abstract

The purpose of this paper is to analysis optimum maximum velocity of a racing car along the given path by using the minimum time optimization method. The simple mathematical model are the equations of motion with geometrical path constraints, also total driving and braking forces are upper and lower bounds, respectively.

The usefulness of this paper is to predict optimum maximum velocity of a racing car for driver to know. The driver can plan to use maximum velocity at each circuit path suitable safety velocity limit and ensure self-confident to drive.

### 1. บทนำ

การออปติไมซ์เซชัน (Optimization) เป็นวิธีการหรือเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่นำมาใช้โดยมีจุดประสงค์เพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุด ซึ่งค่าที่เหมาะสมที่สุดนี้เป็นได้ทั้งค่าที่ต่ำสุดหรือค่าสูงสุด ตัวอย่างการหาค่าต่ำสุดที่เหมาะสมเช่น การลดน้ำหนักของคานรองรับให้ต่ำที่สุดโดยค่าความแข็งแรงยังคงเป็นที่ยอมรับได้, การคำนวณเวลาที่น้อยที่สุดในการเคลื่อนที่จากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ส่วนตัวอย่างการหาค่าสูงสุดที่เหมาะสมเช่น การออกแบบเครื่องยนต์ให้มีสมรรถนะสูงสุด, การหาค่าความเร็วสูงสุดในการเคลื่อนที่ เป็นต้น ดังนั้น เป้าหมายของการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) ทำเพื่อหาค่าที่เหมาะสมที่สุดทั้งด้านการลงทุน พลังงาน การใช้ประโยชน์และความปลอดภัยนั่นเอง

ได้มีการนำเอาวิธีการออปติไมซ์เซชัน (Optimization) มาใช้ในการออกแบบสนามแข่งและออกแบบรถแข่งเพื่อเพิ่มสมรรถนะของรถให้สามารถทำความเร็วให้สูงที่สุดเท่าที่จะทำได้ และได้มีการสร้าง จี-จี ไโดแกรม (g-g planar diagrams) ขึ้นมาเพื่อใช้วิเคราะห์สมรรถนะของรถแข่ง [1] การคำนวณหาค่าความเร็วเฉลี่ยของรถที่วิ่งในสนามแข่ง [1] การหาเส้นแนววิ่ง (Racing line) ที่เหมาะสมที่จะสามารถผ่านโค้งไปได้ด้วยเวลาที่น้อยที่สุด [2] การคำนวณหามุมเลี้ยว แรงขับเคลื่อนแรงเบรก น้ำหนักที่เหมาะสมในอันที่จะทำให้เพิ่มความเร็วกับรถแข่ง [3,4,5,6] ซึ่งงานวิจัยต่างๆ เหล่านี้ก็ได้นำมาใช้กับการแข่งรถในด้านการปรับแต่งหรือปรับปรุงให้รถแข่งมีสมรรถนะที่พร้อมที่สุดสำหรับการแข่งขัน ส่วนในด้านของนักขับก็ได้มีการวางแผนในการขับโดยใช้อาศัยข้อมูลต่างๆ ที่ได้จากการวิจัย และจากการฝึกซ้อม

แต่ปัญหาต่างๆ ในเรื่องความเร็วสูงสุดของการแข่งขันรถยนต์ก็ยังไม่หมดไป เนื่องจากว่ามีตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับความเร็วของรถแข่งอยู่มากมาย ซึ่งงานวิจัยแต่ละงานก็ไม่สามารถทำการแก้ไขได้ทั้งหมด อาจ

จะด้วยเหตุผลทางด้านเวลา งบประมาณ เครื่องมือ ความซับซ้อนของปัญหา ฯลฯ

ปัญหาหนึ่งที่ยังไม่ได้รับการแก้ไขหรือให้คำตอบที่ชัดเจนอีกปัญหาหนึ่งนั่นก็คือ ปัญหาในเรื่องการหาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมกับรถแข่งและสภาพของสนามแข่งขัน ว่าค่าความเร็วสูงสุดที่รถแข่งยังทำได้จะมีขีดจำกัดสูงสุดเป็นเท่าใดโดยที่จะไม่หลุดหรือไถลออกนอกเส้นทางหรือสนามแข่ง ซึ่งหากสามารถหาคำตอบนี้ได้ก็จะเป็นประโยชน์ต่อนักแข่งในการที่จะใช้เป็นข้อมูลในการวางแผนการขับ ในการเลือกใช้ความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมในแต่ละช่วงของสนามแข่งขัน ในสนามแข่งจะมีจุดที่เป็นจุดวิกฤตที่สุดอยู่ที่โค้งต่างๆ เนื่องจากว่าจะมีความเร็วที่เหมาะสมที่สุดเพียงค่าเดียวเท่านั้นที่จะแล่นผ่านไปได้อย่างปลอดภัยสูงสุดที่เหมาะสม ซึ่งหากรู้ค่าความเร็วนี้แล้วก็จะเป็นการเพิ่มความมั่นใจในการขับให้กับนักแข่งโดยไม่ต้องกังวลกับปัญหาว่าจะใช้ความเร็วสักเท่าใดในการเข้าโค้ง ซึ่งในปัจจุบันนี้นักแข่งยังคงใช้ความใจกล้าและประสบการณ์มาเป็นตัวกำหนดในการเลือกใช้ความเร็วที่นักขับเองคิดว่าเร็วสูงสุดและปลอดภัยจากการลื่นไถล ด้วยการกระทำเช่นนี้ที่เราพบเห็นนั้นก็คือมักเกิดอุบัติเหตุจนไม่สามารถแข่งขันจนจบครบรอบการแข่งขัน นั่นเอง

บทความนี้จึงมุ่งไปยังการหาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่ง ด้วยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์การเคลื่อนที่ของรถแข่งในรูปแบบอย่างง่ายขึ้นมา โดยมีลักษณะรูปร่างของสนามหรือเส้นทางวิ่งเป็นเงื่อนไข ส่วนขีดจำกัดล่างและขีดจำกัดบนนั้นจะใช้แรงเบรกและแรงขับเคลื่อนที่อ่านได้จากเครื่องมือวัดซึ่งส่วนใหญ่มีติดตั้งอยู่ที่รถแข่งแล้วมาเป็นตัวกำหนด แล้วใช้วิธีการออปติไมต์เซชัน (Dynamic Optimization) แก้ปัญหาเพื่อหาเวลาที่น้อยที่สุดในการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นคำตอบที่เหมาะสม

## 2. ทฤษฎี

### 2.1 ทฤษฎีการออปติไมต์เซชัน (Optimization)

การออปติไมต์เซชัน (Optimization) เป็นการหาค่าเวกเตอร์ที่ทำให้ฟังก์ชันมีค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดที่เหมาะสม ซึ่งปัญหาทางด้านวิศวกรรมส่วนใหญ่โดยทั่วไปจะมีอยู่สองกรณี [7,8,9] ดังนี้ กรณีแรกปัญหาเป็นแบบไม่ขึ้นกับเวลา (Static Optimization) มีรูปแบบสมการเป็น

$$J = f(\bar{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

โดยจะมีรูปแบบของเงื่อนไขอยู่ 3 รูปแบบคือ

1. เป็นแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconstrained Optimization)
2. เป็นแบบมีสมการเป็นเงื่อนไข (Equality Constraints) คือ

$$g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad , l = 1, \dots, m \quad (2)$$

3. เป็นแบบมีสมการเป็นเงื่อนไข (Inequality Constraints) คือ

$$c_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad , l = 1, \dots, m \quad (3)$$

และอาจจะมีการกำหนดช่วงหรือขอบเขตของตัวแปรด้วยหรือไม่ก็ได้ ซึ่งมีรูปแบบการกำหนดดังนี้คือ

$$x_i^l \leq x \leq x_i^u \quad , i = 1, \dots, n \quad (4)$$

กรณีที่สองปัญหาเป็นแบบขึ้นกับเวลา (Dynamic Optimization) มีรูปแบบสมการเป็น

$$J = f(\bar{x}) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \quad (5)$$

โดยทั่วไปแล้วปัญหาทางด้านวิศวกรรมจะบ่งบอกลักษณะจำเพาะของพฤติกรรมอยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equation Form) โดยตั้งอยู่บนกฎพื้นฐานทางกายภาพ ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของยานยนต์ก็จะตั้งอยู่บนกฎพื้นฐานทางกลศาสตร์ การถ่ายเทความร้อนจากห้องสู่อากาศก็จะต้องอยู่บนกฎพื้นฐานทางเทอร์โมไดนามิกส์ ดังนั้น สมการโดยทั่วไปของระบบวิศวกรรมจะมีรูปแบบเป็นสมการอนุพันธ์ ดังนี้

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, t) \quad , i = 1, \dots, n \quad (6)$$

เมื่อ  $x_i$  เป็นตัวแปรบอกสถานะของระบบ (state variable)

$u_i$  เป็นตัวแปรควบคุมระบบ (control variable)

$t$  เป็นเวลา (time)

จากสมการที่ (6) หากกำหนดค่าเริ่มต้นและช่วงเวลาที่พิจารณา  $x(t_0)$  ,  $t_0 \leq t \leq t_f$  จะสามารถหาค่าต่ำสุดหรือค่าสูงสุดที่เหมาะสมได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$J = \Phi(t, x_1, \dots, x_n)_{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) dt \quad (7)$$

โดยมีรูปแบบของเงื่อนไขอยู่ 3 รูปแบบเช่นกันคือ

1. เป็นแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconstrained Optimization)
2. เป็นแบบมีสมการเป็นเงื่อนไข (Equality Constraints) คือ

$$g_l(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad , l = 1, \dots, m \quad (8)$$

3. เป็นแบบมีสมการเป็นเงื่อนไข (Inequality Constraints) คือ

$$c_l(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad , l = 1, \dots, m \quad (9)$$

ทั้งนี้ในการแก้ปัญหาที่ขึ้นกับเวลาที่มีความจำเป็นที่จะต้องระบุเวลาของสถานะเริ่มต้นและสถานะสุดท้าย ซึ่งโดยทั่วไปแล้วสามารถทำการระบุได้ 2 รูปแบบ ดังนี้

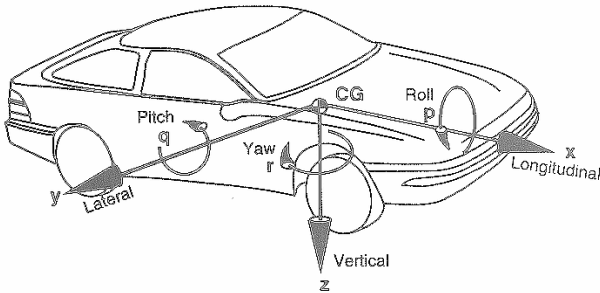
แบบกำหนดเวลาสุดท้าย (Fixed Final Time)

แบบไม่กำหนดเวลาสุดท้าย (Variable Final Time)

ซึ่งการหาค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมของรถแข่งจะต้องใช้ลักษณะการกำหนดช่วงเวลาสุดท้ายเป็นแบบไม่กำหนดเวลาสุดท้าย (Variable Final Time) ในการแก้ปัญหา

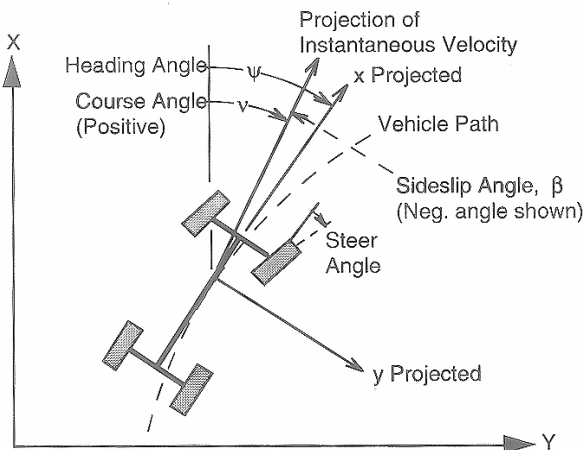
## 2.2 ทฤษฎีการเคลื่อนที่ของรถแข่ง

ในขณะที่รถเคลื่อนที่ไปนั้นจะต้องมีการเร่ง การเบรก การเลี้ยวโค้ง หรือการเคลื่อนที่ผ่านถนนขรุขระ ซึ่งจะทำให้รถเกิดการเคลื่อนที่ในแนวแกนทั้งสามแกน [10,11,12,13] คือ การเร่งหรือเบรกเกิดการเคลื่อนที่ขึ้นลง (Pitch) การเคลื่อนที่ผ่านถนนขรุขระเกิดการเหียงซ้ายขวา (Yaw) และขณะเลี้ยวโค้งจะทำให้เกิดการเอียง (Roll) พิจารณาได้จากระบบแกนตามกฎมีอวาท ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 ระบบแกนของยานยนต์ (SAE Vehicle Axis System)

ในการเคลื่อนที่ของยานยนต์โดยทั่วไปแล้วจะพรรณนาได้ด้วยความเร็วในการเคลื่อนที่ของระบบแกนของยานยนต์เปรียบเทียบกับระบบแกนของโลก พิจารณาจากรูปที่ 2



รูปที่ 2 การเคลื่อนที่ของยานยนต์ในระบบแกนโลก

โดยการใช้กฎข้อที่สองของนิวตัน พิจารณาการเคลื่อนที่ทั้งสองระบบคือเชิงเส้นและเชิงหมุนจะได้สมการในการเคลื่อนที่ของรถดังนี้ ระบบการเคลื่อนที่เชิงเส้น (Translational Systems)

$$\sum F_x = ma_x \quad (N) \quad (10)$$

$$\sum F_y = ma_y \quad (N) \quad (11)$$

$$\sum F_z = ma_z \quad (N) \quad (12)$$

ระบบการเคลื่อนที่เชิงหมุน (Rotational Systems)

$$\sum T_x = I_{xx}\alpha_x \quad (N) \quad (13)$$

$$\sum T_y = I_{yy}\alpha_y \quad (N) \quad (14)$$

$$\sum T_z = I_{zz}\alpha_z \quad (N) \quad (15)$$

โดยที่

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{W}{g} m = F_f + F_r - R_a - R_{rf} - R_{rr} - R_d - R_g \quad (16)$$

$$\text{เมื่อ } \frac{d^2x}{dt^2} = a \quad (m/s^2)$$

$F_f$  = tractive effort of the front tire (N)

$F_r$  = tractive effort of the rear tire (N)

$R_a$  = aerodynamic resistance (N)

$R_{rf}$  = resistance of the front tire (N)

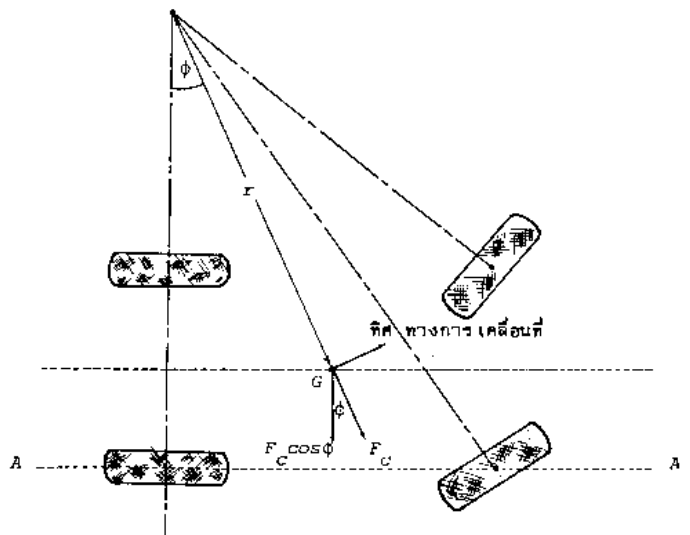
$R_{rr}$  = resistance of the rear tire (N)

$R_d$  = drawbar load (N)

$R_g$  = grade resistance (N)

## 2.3 การทรงตัวของรถแข่งบนทางโค้ง

ในขณะที่รถยนต์เลี้ยวโค้งนั้น [14] ล้อหน้าจะหันเอียงไปทางด้านที่ต้องการเลี้ยว แต่ล้อหลังทั้งสองจะหันเอียงไม่เท่ากัน ล้อด้านในจะเอียงมากกว่าล้อด้านนอก ซึ่งการเลี้ยวโค้งนั้นจะทำให้เกิดแรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลางกระทำกับรถยนต์ตรงจุดศูนย์กลางมวล ดังรูปที่ 3

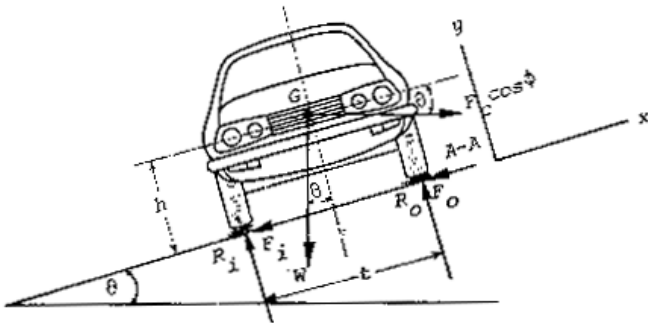


รูปที่ 3 แรงเหวี่ยงหนีศูนย์กลางกระทำกับรถยนต์ในขณะที่เลี้ยวโค้ง

ดังนั้นรถจะเริ่มพลิกคว่ำเมื่อ โมเมนต์พลิกคว่ำเท่ากับโมเมนต์ทรงตัว ทำให้สามารถคำนวณหาค่าความเร็วที่รถจะเริ่มพลิกคว่ำได้ดังนี้

$$v = \left[ \frac{6.48grt}{h} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{km/h}) \quad (17)$$

แต่โดยทั่วไปแล้วถนนจะมีการออกแบบให้มีมุมเอียงที่ทางโค้งอยู่ แล้ว เพื่อลดค่าโมเมนต์พลิกคว่ำและเพิ่มค่าโมเมนต์ทรงตัว ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 การทรงตัวของรถยนต์บนทางโค้ง

ดังนั้นหากพิจารณาจากรูปที่ 4 ขณะรถยนต์เข้าโค้งอาจจะเกิดเหตุการณ์ได้ 2 กรณี คือ

กรณีแรกคือ รถยนต์พลิกคว่ำรอบแกน A-A ดังนั้นความเร็วสูงสุดที่ทำให้รถเริ่มพลิกคว่ำก็คือ

$$v = \left[ \frac{12.96gr \left( h \sin \theta + \frac{t}{2} \cos \theta \right)}{h \cos \theta - \frac{t}{2} \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{km/h}) \quad (18)$$

กรณีที่สองคือ รถยนต์ลื่นไถลออกนอกถนน เนื่องจากแรงเสียดทานระหว่างยางกับพื้นถนนไม่เพียงพอ และความเร็วสูงสุดที่ทำให้เริ่มมีการลื่นไถลคือ

$$v = \left[ \frac{12.96gr(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{km/h}) \quad (19)$$

เมื่อ  $r$  = รัศมีโค้ง (m)

$h$  = ความสูงของศูนย์กลางมวล (m)

$t$  = ระยะห่างล้อซ้ายและขวา (m)

$\theta$  = ความเอียงของถนน (องศา)

$\mu$  = สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน

$g$  = ความเร่งจากแรงโน้มถ่วง ( $\text{m/s}^2$ )

### 3. การวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง

จากสมการที่ (10), (11) และ (12) เป็นสมการการเคลื่อนที่อย่างง่ายที่สุดของรถแข่งโดยให้ค่าตัวแปรต่างๆ เช่น  $F_x, F_y, R_a, R_r, R_{rr}$

$R_d, R_g$  เป็นค่ารวมกันทั้งหมดและเรียกว่า  $F_x, F_y, F_z$  ตามแนวแกน  $x, y$  และ  $z$  ตามลำดับ

กำหนดให้รถแข่งมีมวลรวมทั้งหมดเท่ากับ 500 กก. และให้แรงขับเคลื่อนและแรงเบรกมีค่าเท่ากับ 100 และ -100 นิวตัน โดยให้รถแข่งวิ่งในสนามแข่งรูปวงกลมมีรัศมี 20 ม. ถนนเรียบและรถไม่เคลื่อนที่ในแนวแกน  $z$  ทำให้ได้สมการต่างๆ ดังต่อไปนี้

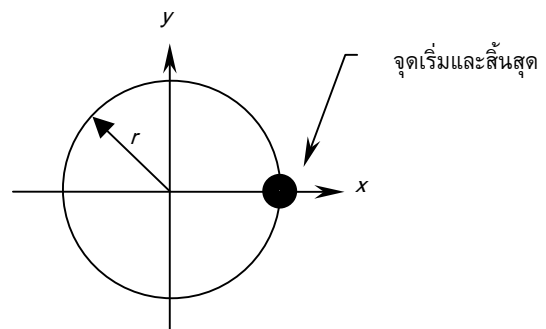
$$\begin{aligned} a_x = \ddot{x} &= \frac{F_x}{500}, & -100 \leq F_x \leq 100 \quad (\text{N}) \\ a_y = \ddot{y} &= \frac{F_y}{500}, & -100 \leq F_y \leq 100 \quad (\text{N}) \\ a_z = \ddot{z} &= \frac{F_z}{500} = 0, & -100 \leq F_z \leq 100 \quad (\text{N}) \end{aligned} \quad (20)$$

กำหนดแกน  $x, y$  และ  $z$  ดังต่อไปนี้

$$X_1 = x, \quad X_2 = y, \quad X_3 = z \quad (21)$$

สนามแข่งเป็นรูปวงกลมมีขนาดดังนี้

$$X_1^2 + X_2^2 = r^2, \quad X_1^2 + X_2^2 - 400 = 0 \quad (22)$$



รูปที่ 5 แสดงจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของรถที่วิ่งในสนามแข่ง ( $r=20$  m)

จากสมการที่ (6) ทำการจัดรูปสมการและตัวแปรจากสมการที่ (20)-(22) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_4, \quad \dot{X}_2 = X_5, \quad \dot{X}_3 = X_6, \\ \dot{X}_4 &= \frac{F_x}{500}, \quad \dot{X}_5 = \frac{F_y}{500}, \quad \dot{X}_6 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ที่เวลาเริ่มต้น  $x(t_0), t_0 \leq t \leq t_f$  ที่สภาวะเริ่มต้นตัวแปรต่างๆ มีค่าดังนี้

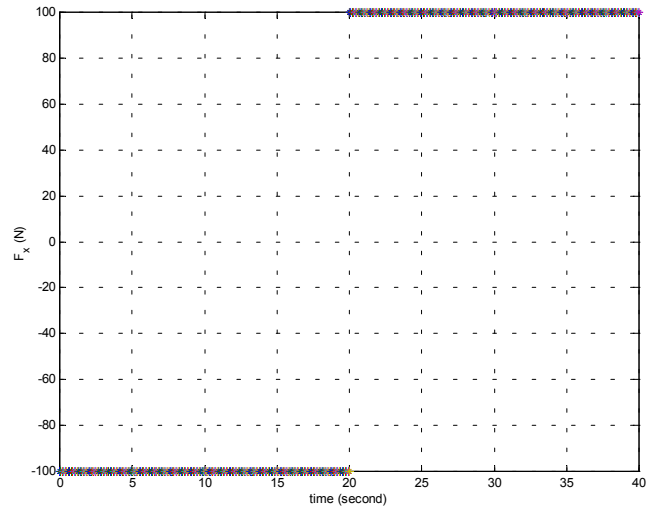
$$\begin{aligned} x_1(0) &= 20, \\ x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

ที่เวลาสุดท้าย  $x(t_f)$ ,  $t_0 \leq t \leq t_f$  ที่สภาวะสุดท้ายตัวแปรต่างๆ มีค่าดังนี้

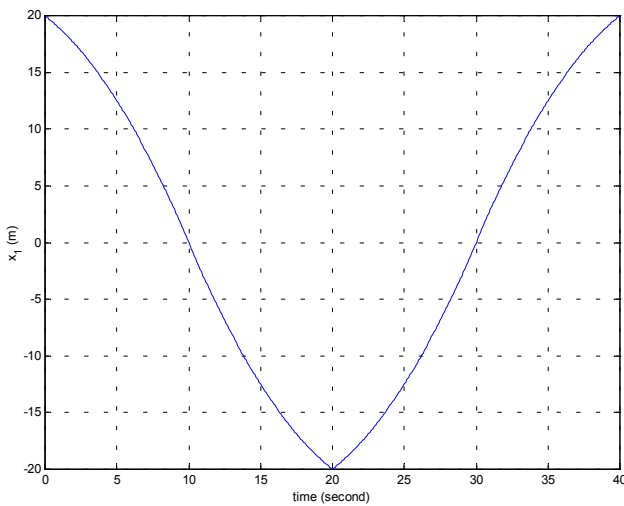
$$\begin{aligned} x_1(t_f) &= 20 \text{ m} \\ x_2(t_f) &= x_3(t_f) = 0 \\ x_4(t_f) &=? \\ x_5(t_f) &=? \\ x_6(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ทำการหาคำตอบคือค่า  $x_4(t_f) = ?$ ,  $x_5(t_f) = ?$  ซึ่งก็คือค่า  $\dot{x}_1$  และ  $\dot{x}_2$  (ความเร็วสุดท้ายที่สูงสุด) โดยใช้โปรแกรมแมทแลบ (Matlab) คำตอบที่ได้ก็คือค่าความเร็วสูงสุดที่เหมาะสมกับรถแข่งคันนี้นั่นเอง

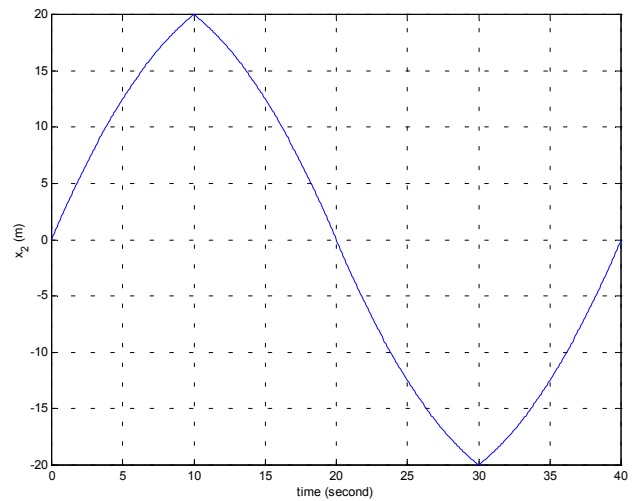
#### 4. ผลการวิเคราะห์หาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่ง



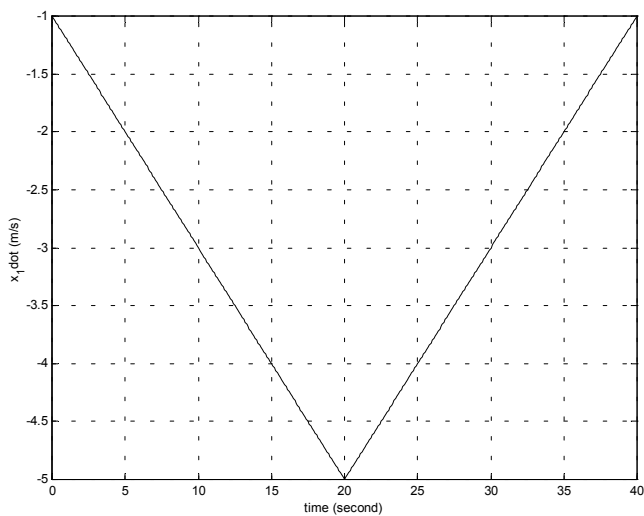
รูปที่ 8 ซีดจำกัดล่างและบนของแรงตามแนวแกน  $x$



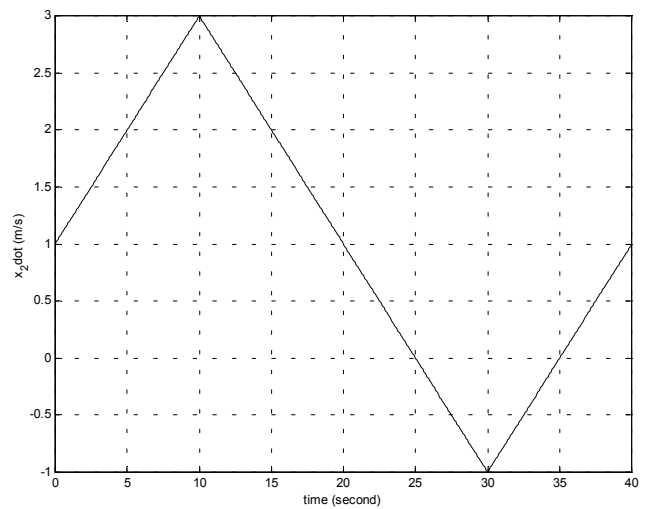
รูปที่ 6 การเคลื่อนที่ตามแนวแกน  $x$



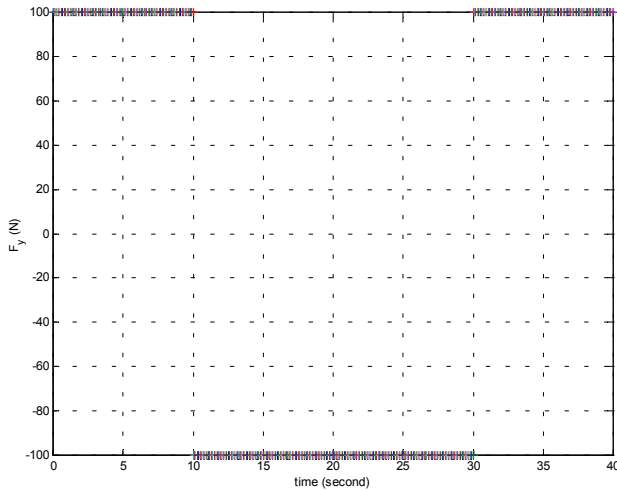
รูปที่ 9 การเคลื่อนที่ตามแนวแกน  $y$



รูปที่ 7 ความเร็วในการเคลื่อนที่ตามแนวแกน  $x$



รูปที่ 10 ความเร็วในการเคลื่อนที่ตามแนวแกน  $y$



รูปที่ 11 ซีดจำกัดล่างและบนของแรงตามแนวแกน  $y$

## 5. สรุป

ตัวการใช้วิธีการออบติไมต์เซชัน (Optimization) เข้ามาแก้ปัญหาหลังจากที่ได้ทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบสมการการเคลื่อนที่อย่างง่ายที่สุดของรถแข่งแล้วผลปรากฏว่าสามารถหาค่าตอบของค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งที่เหมาะสมได้ แต่ทั้งนี้ยังไม่ได้ใช้สมการที่ (17) (18) และ (19) มาตรวจสอบค่าความเร็วที่หาได้ แต่ผลลัพธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์นี้ก็สามารถยืนยันได้ว่า วิธีการออบติไมต์เซชัน (Optimization) มีศักยภาพเพียงพอที่จะนำไปใช้ในการแก้ปัญหาการหาค่าความเร็วสูงสุดของรถแข่งได้

ดังนั้น สามารถที่จะนำเอาหลักการนี้ไปแก้ไขสมการการเคลื่อนที่ให้เสมือนจริงได้ต่อไปในอนาคต

## เอกสารอ้างอิง

- [1] William F. Milliken and Douglas L. Milliken, "Race Car Vehicle Dynamics", SAE International, 1995, USA.
- [2] Griffiths, R., "Minimum Time Simulation of a Racing Car", School of Mechanical Engineering, Cranfield University, MSc thesis, 1992
- [3] Casanova, D., Sharp, R. S. and Symonds, P., "Minimum time manoeuvring: The Significance of Yaw Inertia", Vehicle Dynamics, 2000, p.77-115
- [4] Casanova, D., Sharp, R. S. and Symonds, P., "On minimum time optimization of Formula One Cars: The influence of vehicle mass", Proc.AVEC 2000, Ann Arbor(MI), August, 2000, p.585-592
- [5] Casanova, D., Sharp, R. S. and Symonds, P., "Sensitivity to Mass Variations of the Fastest Possible Lap of a Formula One Car", Vehicle System Dynamics Supplement 35, 2001, p.119-134
- [6] Casanova, D., Sharp, R. S. and Symonds, P., "On the Optimisation of the Longitudinal Location of the Mass Centre

of a Formula One Car for two Circuits", School of Engineering, Cranfield University, Bedford, United Kingdom, 2002, p.1-7

- [7] Singiresu S. Rao, "Engineering Optimization Theory and Practice", John Wiley & sons, Inc., 1996, third edition.
- [8] Arthur E. Bryson, Jr and Yu-Chi Ho, "Applied Optimal Control Optimization, Estimation, and Control", John Wiley & sons, Inc., 1975
- [9] Sunil Kumar Agrawal and Brian C. Fabien, "Optimization of Dynamic Systems", Kluwer Academic Publishers, 1999
- [10] Thomas D. Gillespie, "Fundamentals of Vehicle Dynamics", Society of Automotive Engineering, Inc., 1992
- [11] J. Y. Wong, "Theory of Ground Vehicles", John Wiley & sons, Inc., 2001
- [12] J. R. Ellis, "Vehicle Handling Dynamics", Mechanical Engineering Publications Limited, London, 1993
- [13] มงคล มงคลวงศ์โรจน์ และ ปิยวิทย์ มหาโพธิ์, "การวิเคราะห์พฤติกรรมการทางไดนามิกส์ของรถขณะเลี้ยวโค้ง", การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทยครั้งที่ 15, ปี พ.ศ. 2544, หน้า MM19-24
- [14] ชีระยุทธ สุวรรณประทีป, "วิศวกรรมยานยนต์: ภาคคำนวณ", ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ การพิมพ์