

การจำลองพลศาสตร์โครงสร้างทางกลด้วยแบบจำลองโมดัลเพื่อการทำนายและควบคุม

Dynamic modelling of Mechanical Structures using Modal Models to Prediction and Control

กนก ลิมสมุทพรเพชร¹ จักร จันทลักขณา²
ศูนย์วิจัยวิศวกรรมคำนวณขั้นสูง ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 ถ.พิบูลสงคราม เขตบางซื่อ กรุงเทพฯ 10800
โทร 0-29132500 ต่อ 8303 โทรสาร 0-25870026 กด 111
Kanok Limsamutphet Chak Chantalakhana*

Research center on Advanced Computational Engineering (RACE) Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering,
King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok
1518 Pibulsongkram Rd, Bangsue Bangkok 10800 Thailand
Tel: 0-29132500 Ext. 8303 Fax: 0-25870026 press 111 E-mail: chak@kmitnb.ac.th¹, mr_kanok@yahoo.com²

บทคัดย่อ

ในการทำนายพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของโครงสร้างทางกล เพื่อนำไปออกแบบวิธีควบคุมการสั่นของโครงสร้าง สามารถทำได้หลายวิธี เช่นการสร้างแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์ของโครงสร้างเป็นต้น อย่างไรก็ตามจากความไม่สมบูรณ์ของการยึดข้อต่อโครงสร้าง และคุณสมบัติวัสดุเองทำให้ค่าสภาวะขอบเขต มวลและความแข็งที่สปริงรวมถึงการหน่วงของโครงสร้างจริงมีแนวโน้มที่จะต่างไปจากแบบจำลอง การทดสอบโมดัลจะใช้เพื่อสร้างแบบจำลองทางโหมดการสั่นที่ให้ความถูกต้องของแบบจำลองพลศาสตร์ที่แม่นยำกว่า ซึ่งในการศึกษานี้จะแสดงให้เห็นว่า จากแบบจำลองโมดัลของคานยื่นซึ่งได้มาจากการทดสอบและดึงข้อมูลโหมดการสั่นด้วยเทคนิคโพลีเรเฟเฟอเรนซ์ จะให้ความถูกต้องของแบบจำลองที่สามารถนำไปควบคุมการสั่นของโครงสร้างได้อย่างมีประสิทธิภาพ ดังแสดงการศึกษาทดลองเชิงตัวเลขของระบบควบคุมแบบป้อนกลับความเร็วค่าลบ เพื่อเพิ่มสัมประสิทธิ์การหน่วงให้กับโหมดการสั่น ซึ่งความถูกต้องของโหมดที่ใช้ในแบบจำลองจะมีผลต่อประสิทธิภาพในการควบคุมลดการสั่น

Abstract

For design of active vibration control, prediction of dynamic behaviour of a mechanical structure can be obtained from several techniques, for example, finite element modelling of a structure. However, non-ideal structural joints and material properties are resulted to differ boundary conditions and physical properties of a real structure from those of the model. Nevertheless, modal testing is an experimental technique used for obtaining more

descriptive model of a real structure. In this study, modal models of cantilever beams, is constructed from experimental modal data using the Polyreference technique. The models are provided with more accurate prediction to perform active vibration control of the structures. Performance of a negative velocity feedback controller is studied to damping augmenting of vibrational modes. An accuracy of the modes is effected to performance of structural vibration suppression.

1. บทนำ

โครงสร้างทางกลที่มีลักษณะผนังบาง (Thin-walled structures) มีแนวโน้มที่จะเกี่ยวข้องกับปัญหาด้านการสั่นสะเทือนเมื่อเผชิญสภาวะการรบกวนจากภายนอก เนื่องจากโครงสร้างมีความแข็งตึงสปริง (Stiffness) ของโครงสร้างเองค่อนข้างต่ำ ฉะนั้นแล้วจึงนับเป็นปัญหาประการหนึ่งในการออกแบบระบบโครงสร้างน้ำหนักเบาต่างๆ ที่จะต้องพิจารณาวิธีแก้ปัญหาการรบกวนที่จะมีผลต่อการสั่นโครงสร้างในขั้นตอนการออกแบบ

วิธีการควบคุมการสั่นของโครงสร้างผนังบางทำได้ด้วยกันหลายวิธี เช่นวิธีการแบบพาสซีฟ (Passive control) โดยการเพิ่มการหน่วง (Damping) เสริมเข้าไปในโครงสร้าง ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของโครงสร้างมีส่วนนำมาใช้ช่วยตัดสินใจในการแก้ไขปัญหาการสั่นได้ในอีกวิธีการหนึ่งของการควบคุมการสั่นโดยเฉพาะอย่างยิ่งในโครงสร้างผนังบางคือวิธีการแบบแอคทีฟ (Active control) ซึ่งอาศัยอุปกรณ์ยังสัญญาณและกระตุ้นควบคุม (Sensor/actuator) หรืออาจรวมกับตัวประมวลผลสัญญาณแบบดิจิทัล (Digital signal processor) เพื่อ

* Corresponding author

คำนวณสิ่งการควบคุมด้วยอัลกอริทึมการคำนวณที่ซับซ้อนได้ ซึ่งการควบคุมโหมดการสั่นที่เด่น (Mode of vibration) ถือเป็น การควบคุมที่สามารถลดระดับการสั่นได้มีประสิทธิภาพ [1] ในตัวระบบควบคุม (Controller) บางระบบต้องการแบบจำลองคณิตศาสตร์ที่ให้ความถูกต้องของโหมดโครงสร้างจริงที่ต้องการควบคุม ดังนั้นการทดสอบโครงสร้างเพื่อนำผลที่ได้มาช่วยสร้างแบบที่ถูกต้องจึงมีความจำเป็น

การทดสอบโมดัล (Modal testing) เป็นวิธีการทางการทดลองเพื่อให้ได้ข้อมูลเพียงพอในการนำไปสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เชิงโหมด (Modal model) ซึ่งนับตั้งแต่ยุคแรกๆ ของการพัฒนาอัลกอริทึมในการคำนวณเพื่อสร้างแบบจำลองทางโหมดมีทั้งการพัฒนาโดยใช้ข้อมูลการสั่นที่ทดสอบในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ ซึ่งวิธีการในทางความถี่จะเห็นโหมดการสั่นที่เด่นได้ชัดเจนและสามารถดึงข้อมูลทางโหมด (Modal data) คือ ความถี่ธรรมชาติ (Natural frequencies) อัตราส่วนการหน่วง (Damping ratio) และรูปร่างการสั่น (Mode shapes) เหล่านี้ออกมา ยกตัวอย่างวิธีการทางความถี่คือ เทคนิคเลือกยอด (Peak Picking) [2] หรือเป็นการประมาณแต่ละยอดโหมดการสั่นของฟังก์ชันตอบสนองความถี่ (Frequency Response Function, FRF) ที่ได้จากความสัมพัทธ์สเปกตรัมปริมาณออกหารด้วยสเปกตรัมปริมาณเข้าระบบ หรือเมื่อมองเป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน FRF จะเป็นการประมาณแบบจำลองด้วยเทคนิค Circle Fit ซึ่งวิธีการเช่นนี้สามารถใช้ได้ดีในกรณีที่ระบบมีการหน่วงไม่มากและโหมดการสั่นค่อนข้างแยกเด่นจากกันชัดเจน แต่สำหรับในกรณีที่โหมดการสั่นมีการหน่วงมากและมีโหมดการสั่นที่เกิดชิดกัน วิธีการเทคนิคแบบใช้ข้อมูลโหมดในแกนเวลาจะเหมาะสมกว่า เช่นเทคนิคเอกโปเนนเชียลเชิงซ้อน (Complex exponential) [2] เทคนิคอิบราฮิม (Ibrahim Time Domain, ITD) [3] หรือเทคนิคโพลีเรฟเฟอเรนซ์ (Polyreference) [4] โดยเทคนิคโพลีเรฟเฟอเรนซ์ถูกพัฒนาให้สามารถใช้กับการกระตุ้นพร้อมกันหลายจุดและวัดสัญญาณออกจากหลายจุดวัดได้ ซึ่งเหมาะกับโครงสร้างขนาดใหญ่ที่การกระตุ้นเพียงจุดเดียวไม่สามารถทำให้เกิดการพัวพันไหวตอบสนองทั้งโครงสร้างได้ เช่น โครงสร้างเครื่องบิน ตู้โบกักรถไฟ เป็นต้น ซึ่งในงานวิจัยนี้จะได้ทำการแสดงการใช้เทคนิคโพลีเรฟเฟอเรนซ์เพื่อสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์เชิงโหมดของโครงสร้างคานยื่น และแสดงผลความถูกต้องของแบบจำลองที่เทียบกับผลการทดสอบ และในส่วนที่สองจะเป็นการแสดงให้เห็นว่า ความสำคัญของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้องในงานควบคุมการสั่นแบบแอกทีฟ ซึ่งจะเปรียบเทียบระหว่างตัวควบคุมที่สร้างจากแบบจำลองด้วยเทคนิคไฟไนต์อีลิเมนต์ แบบจำลองทางโหมดจากการทดสอบที่ถูกต้อง และแบบจำลองทางโหมดที่ผิดพลาด

2. ทฤษฎี

2.1 แบบจำลองพลศาสตร์โมดัล

พิจารณาสมการการเคลื่อนที่ของระบบทางกล

$$[M]\ddot{x}(t) + [C]\dot{x}(t) + [K]x(t) = \{f(t)\} \quad (1)$$

กรณีที่ไม่มีเทอมการหน่วงหรือในรูปปัญหาทางไอเกน (Eigenproblem)

$$([K] - \omega^2[M])\{x\} = \{f\} \quad (2)$$

ถ้าให้ $[Z(\omega)] = ([K] - \omega^2[M])$

$$[Z(\omega)]\{x\} = \{f\} \quad (3)$$

ดังนั้น $\{x\} = [Z(\omega)]^{-1}\{f\}$ (4)

โดยอินเวอร์สเมตริกซ์ $[Z(\omega)]^{-1}$ นิยามเป็นเมตริกซ์ FRF ในทอม Receptance $[\alpha(\omega)]$ และให้ $[\Phi]$ เป็นเมตริกซ์ไอเกน (Eigenmatrix)

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = [\Phi]^T ([K] - \omega^2[M]) [\Phi] \quad (5)$$

หรือ

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] \left[\frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2} \right] [\Phi] \quad (6)$$

หรือถ้าพิจารณาที่แต่ละทอมในเมตริกซ์ Receptance

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{r \phi_j \phi_k}{(\omega_r^2 - \omega^2)} = \sum_{r=1}^n \frac{r A_{jk}}{(\omega_r^2 - \omega^2)} \quad (7)$$

ในกรณีที่ไม่มีเทอมการหน่วงหรือมีเมตริกซ์ $[C]$ จะได้ฟังก์ชัน Receptance นี้คือ

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{r A_{jk}}{(s_r^2 - \omega^2)} \quad (8)$$

โดย s_r คือค่าไอเกนวาเล เท่ากับ $s_r = -\omega_r \zeta_r \pm i \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$ โดย ζ_r คือค่าอัตราส่วนการหน่วง (Damping ratio) ซึ่งตัวแปรเชิงโหมดในแบบจำลองคณิตศาสตร์ตามสมการที่ (8) ซึ่งแสดง FRF ที่กระตุ้น ณ จุด k และวัดหยังสัญญาณออก ณ จุด j ประกอบด้วย ความถี่ธรรมชาติที่แต่ละโหมด ω_r ค่าอัตราส่วนการหน่วงที่แต่ละโหมด ζ_r และค่าคงที่โหมด ณ จุดวัด $j, r \phi_j$ หรือเป็นทอมหนึ่งในไอเกนเวกเตอร์

2.2 เทคนิคโพลีเรฟเฟอเรนซ์

เทคนิคโพลีเรฟเฟอเรนซ์ (Polyreference Complex Exponential) เป็นเทคนิคการหาโมดัลพารามิเตอร์ด้วยวิธีที่ถูกพัฒนามาจากเทคนิคเอกโปเนนเชียลเชิงซ้อน (Complex Exponential) และเทคนิคกำลังสองน้อยสุดของเอกโปเนนเชียลเชิงซ้อน (Least-Square Complex Exponential) [5] เพื่อเพิ่มความสามารถให้กับเทคนิคทั้งสองให้สามารถวิเคราะห์ปัญหาแบบ Multiple Input – Multiple Output (MIMO) ได้ ซึ่งในการวิเคราะห์ปัญหาแบบ Single Input – Single Output (SISO) และ SIMO

สำหรับการหาโมดัลพารามิเตอร์ด้วยเทคนิคนี้เราจะเริ่มจากสมการอิมพัลส์โดยนำสมการที่ (8) พิจารณาในโดเมนเวลา สำหรับจุดวัดที่ "j" ต่อแรงที่กระตุ้นที่จุด "k" เป็น

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} r A_{jk} e^{S_r t} \quad (9)$$

และเราทราบว่าขนาดของการสั่นสะท้อนจะมีความสัมพันธ์กับรูปร่างการสั่นสะท้อนเป็น

$$r A_{jk} = Q_r \Psi_{jr} \Psi_{kr} \quad (10)$$

โดยที่ $r A_{jk}$ เทอมเศษเหลือ (Residues)

Q_r = ค่าคงที่หรือสเกลโหมดที่ r (Scaling Factor)

Ψ_{jr} = ค่าไอเกนเวกเตอร์ของโหมดที่ "r" สำหรับจุดตำแหน่งวัดที่ "j"

Ψ_{kr} = ค่าไอเกนเวกเตอร์ของโหมดที่ "r" สำหรับจุดตำแหน่งกระตุ้นที่ "k"

จากสมการที่ (10) เราพบว่าค่าคงที่ Q_r ที่จุดวัดเดียวกันและที่โหมดความถี่เดียวกันจะมีค่าเท่ากัน จะได้ความสัมพันธ์ของ $r A_{jk}$ เทียบกับ Ψ_{kr} เป็น

$$\frac{r A_{j2}}{\Psi_{2r}} = \frac{r A_{j1}}{\Psi_{1r}} \quad \text{หรือ} \quad r A_{j2} = \frac{\Psi_{2r}}{\Psi_{1r}} r A_{j1} = W_{21r} A_{j1}$$

$$r W_{k1} = \frac{\Psi_{kr}}{\Psi_{1r}} \quad (11)$$

แทนความสัมพันธ์

$$r A_{jk} = W_{k1r} A_{j1} \quad (12)$$

จากสมการที่ (12) ทำให้เราสามารถทราบความสัมพันธ์ของค่าเทอมเศษเหลือสำหรับจุดวัดอื่นๆ ได้โดยใช้ค่าเทอมเศษเหลือที่จุดวัดที่ 1 (จุดอ้างอิง) คูณกับค่า $r W_{k1}$ ที่เราหาได้

จากสมการที่ (9) ถ้าหากระบบที่เราทดสอบมีแรงกระทำทั้งหมด q จุด และมีจุดวัดจุดเดียวคือจุดที่ "j" เราจะสามารถเขียนสมการแบบ SIMO สำหรับอิมพัลส์ทั้ง q สมการเป็น

$$h_{j1}(t) = \sum_{r=1}^{2N} r A_{j1} e^{S_r t}$$

$$h_{j2}(t) = \sum_{r=1}^{2N} W_{21r} A_{j1} e^{S_r t}$$

$$\vdots$$

$$h_{jq}(t) = \sum_{r=1}^{2N} W_{q1r} A_{j1} e^{S_r t} \quad (13)$$

ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเมตริกซ์เป็น

$$\begin{Bmatrix} h_{j1}(t) \\ h_{j2}(t) \\ \vdots \\ h_{jq}(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ W_{21} & W_{21} & \dots & W_{21} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{q1} & W_{q1} & \dots & W_{q1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^{S_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{S_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{S_{2N} t} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{j1} \\ A_{j1} \\ \vdots \\ A_{j1} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

หรือเขียนในฟังก์ชันโดยใช้ตัวแปรเมตริกซ์

$$\{h_j(t)\} = [W] \begin{bmatrix} e^{S_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{S_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{S_{2N} t} \end{bmatrix} \{A_{j1}\} \quad (15)$$

จากสมการที่ (14) ค่าที่เราทราบจะมีเพียงเทอมด้านซ้ายของสมการเท่านั้น (ซึ่งได้จากการทดสอบระบบจริง) ส่วนเทอมด้านขวาเป็นค่าที่เราไม่ทราบ ซึ่งสามารถแก้สมการแบบนี้ได้โดยใช้เทคนิค "Prony method" [6] ซึ่งได้นิยามไว้ว่า "สมการโพลีโนเมียลกำลัง L ใดๆ จะสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ที่ทำให้ผลรวมของโพลีโนเมียลเท่ากับศูนย์ได้" โดยสามารถเขียนเป็นสมการทางคณิตศาสตร์ได้เป็น

$$\beta_0 + \beta_1 V_r + \beta_2 V_r^2 + \dots + \beta_L V_r^L = 0 \quad (16)$$

โดยที่ β_0, \dots, β_L จะเป็นค่าคงที่ที่จำนวนจริง

และ เมื่อใช้ Prony method กับสมการที่เป็นเมตริกซ์โพลีโนเมียลได้เป็น

$$[\beta_0] + [\beta_1][W][V] + [\beta_2][W][V]^2 + \dots + [\beta_L][W][V]^L = [0] \quad (17)$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลรวมเมตริกซ์ได้เป็น

$$\sum_{k=0}^L [\beta_k][W][V]^k = [0] \quad (18)$$

$$\text{โดยที่ } [V] = \begin{bmatrix} e^{S_1 \Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{S_2 \Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{S_{2N} \Delta t} \end{bmatrix}$$

ในขั้นต่อไปเราจะหาค่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ $[\beta_k]$ ออกมา โดยเริ่มจากสมการที่ (15) กำหนดให้ช่วงเวลาของข้อมูลคือ 0 ถึง $L\Delta t$ โดยที่ L เป็นจำนวนเต็มหน่วยใดๆ และ Δt เป็นช่วงเวลาระหว่างข้อมูล ซึ่งจะได้

$$\begin{aligned} \{h_j(0)\} &= [W][V]^0 \{A_{j1}\} \\ \{h_j(\Delta t)\} &= [W][V]^1 \{A_{j1}\} \\ &\vdots \\ \{h_j(L\Delta t)\} &= [W][V]^L \{A_{j1}\} \end{aligned} \quad (19)$$

สมการที่ (18) คูณด้วยเมตริกซ์สัมประสิทธิ์เดียวกับสมการโพลีโนเมียลในสมการที่ (17) ดังนั้น

$$\sum_{k=0}^L [\beta_k] \{h_j(k\Delta t)\} = \sum_{k=0}^L [\beta_k][W][V]^k \{A_{j1}\} \quad (20)$$

เราพบว่าจากนิยามของ Prony เทอมด้านขวาจะเท่ากับศูนย์

$$\sum_{k=0}^L [\beta_k] \{h_j(k\Delta t)\} = \{0\} \quad (21)$$

กำหนดให้

$$[\beta_L] = [I]$$

ดังนั้นสมการที่ (21) จะสามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\sum_{k=0}^{L-1} [\beta_k] \{h_j(k\Delta t)\} = -\{h_j(L\Delta t)\} \quad (22)$$

แต่เนื่องจากสมการที่ (22) ใช้ข้อมูลการสั่นสะเทือนเพียง L จุดข้อมูลเท่านั้น ดังนั้นเพื่อให้เมตริกซ์เป็นแบบ Full rank เราจะเพิ่มจำนวนหลักข้อมูลในการคำนวณให้มากขึ้น โดยการเลื่อนจุดข้อมูลไปที่ละ Δt เป็นจำนวน N_i ชุด ซึ่งกลายเป็น

$$\begin{bmatrix} [\beta_0] & [\beta_1] & \dots & [\beta_{L-1}] \\ \{h_j(0)\} & \{h_j(\Delta t)\} & \dots & \{h_j((N_i-1)\Delta t)\} \\ \{h_j(\Delta t)\} & \{h_j(2\Delta t)\} & \dots & \{h_j(N_i\Delta t)\} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \{h_j((L-1)\Delta t)\} & \{h_j(L\Delta t)\} & \dots & \{h_j((L+N_i-2)\Delta t)\} \\ -\{h_j(L\Delta t)\} & -\{h_j((L+1)\Delta t)\} & \dots & -\{h_j((L+N_i-1)\Delta t)\} \end{bmatrix} =$$

หรือเขียนในรูปอย่างง่ายเป็น

$$[B_T] [h_j] = [h'_j] \quad \text{SIMO version} \quad (23)$$

ในทำนองเดียวกันกรณีที่เรามีแรงกระทำกับระบบและจุดวัดเพียงจุดเดียว เราสามารถเขียนสมการที่ (23) ใหม่เป็น

$$[B_T] [h] = [h'] \quad \text{SISO version} \quad (24)$$

จากสมการที่ (23) และสมการที่ (24) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างเทคนิคโพลีเรเฟอเรนซ์กับเทคนิคกำลังสองน้อยสุดของเอกโพเนนเชียลเชิงซ้อนและเทคนิคเอกโพเนนเชียลเชิงซ้อนตามลำดับ และมีหลักในการเลือก N_i คือจะต้องให้ $N_i > L$ เพื่อให้การคำนวณสัมประสิทธิ์ได้ข้อมูลที่ถูกต้อง (Full rank) โดยที่ L คือค่าคงที่ที่ขึ้นอยู่กับช่วงเวลา (จำนวนจุดของข้อมูล) ซึ่งรากของสมการเมตริกซ์โพลีโนเมียลในสมการที่ (17) ควรจะเท่ากับจำนวนโหมดของระบบ $L \times q = 2N$ แต่เนื่องจากในทางปฏิบัติการกำหนดเลือกใช้ $L \times q = 2N$ อาจได้ผลการคำนวณไม่ถูกต้องทั้งหมดทั้งนี้เนื่องจากข้อมูลที่ได้อาจการทดสอบอาจมีผลเนื่องมาจากสัญญาณรบกวนหรือผลกระทบจากปัจจัยอื่นๆ ดังนั้นเราควรใช้ $L \times q \geq 2N$

ซึ่งสามารถสรุปวิธีการเลือกค่าตัวแปรสำหรับเทคนิคโพลีเรเฟอเรนซ์ได้ดังนี้

$$N_i > L > 2N/q$$

โดยที่

N_i = จำนวนชุดของข้อมูลที่ใช้ในสมการที่ (23) เพื่อให้ได้จำนวนจุดข้อมูลมากเพียงพอ

L = จำนวนจุดของข้อมูลใน 1 ชุด (1 หลัก) ของสมการที่ (23)

$2N$ = จำนวนโหมดทั้งหมดของระบบที่ต้องการประมาณ

q = จำนวนจุดที่แรงกระทำต่อระบบ

สำหรับกรณีที่ต้องการใช้จุดวัดหลายจุด ($j = 1, \dots, p$) เราสามารถเขียนสมการที่ (24) เป็น

$$[B_T] [h_T] = [h'_T] \quad \text{MIMO version} \quad (25)$$

และตัวแปรสำหรับการคำนวณโพลีเรเฟอเรนซ์จะเปลี่ยนเป็น

$$N_i p > L > 2N/q$$

ถึงตอนนี้เราสามารถหาค่าสัมประสิทธิ์ของสมการโพลีโนเมียลได้ โดยการคูณเมตริกซ์ทรานส์โพสทั้งสองด้านเพื่อให้เมตริกซ์ทางด้านซ้ายเป็นเมตริกซ์จัตุรัสแล้วย้ายมาด้านขวาเป็น

$$[B_T] = [h'_T] [h_T]^T \left([h_T] [h_T]^T \right)^{-1} \quad (26)$$

ต่อไปเราจะหาค่าเมตริกซ์ $[W]$, $[V]$ โดยพยายามจัดสมการที่ (17) ให้อยู่ในรูปปัญหาแบบโอเกนมาตรฐาน ดังนั้น

$$\sum_{k=0}^L [\beta_k] [W][V]^k = [0] \quad (27)$$

คูณสมการด้านบนด้วยเมตริกซ์ขนาด $2N \times 1$ โดยให้สมาชิกในเมตริกซ์เป็นศูนย์หมดยกเว้นแถวที่เราต้องการหาค่าโหมดของระบบ เช่น ในกรณีที่เรากำลังหาโอเกนวาลูและโอเกนเวกเตอร์ของโหมดที่ 1 เราจะสามารถเขียนได้เป็น

$$\sum_{k=0}^L [\beta_k] [W][V]^k \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} = \sum_{k=0}^L [\beta_k] (e^{s_i \Delta t})^k \{W_1\} = \{0\} \quad (28)$$

ทำนองเดียวกันหากเราต้องการหาโอเกนวาลูและโอเกนเวกเตอร์ที่โหมดที่เหลือ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปเป็น

$$\left[\sum_{k=0}^L [\beta_k] V_r^k \right] \{W_r\} = \{0\} \quad r=1, \dots, 2N \quad (29)$$

และพบว่าค่าของ $\{W_1\}, \dots, \{W_{2N}\}$ จะเป็นเมตริกซ์ซึ่งไม่เป็นศูนย์และไม่ขึ้นอยู่กับผลรวมของ k และการหา $\{W_r\}$ ทั้ง $2N$ ตัว ฉะนั้นจะต้องคำนวณสมการที่ (29) ทั้งหมด $2N$ ครั้งด้วยกัน

$$[[\beta_0] + [\beta_1]V_r + [\beta_2]V_r^2 + \dots + [\beta_{L-1}]V_r^{L-1}]\{W_r\} = -V_r^L\{W_r\} \quad (30)$$

โดยกำหนดให้

$$\begin{aligned} \{z_0\} &= \{W_r\} \\ \{z_1\} &= V_r\{W_r\} = V_r\{z_0\} \\ \{z_2\} &= V_r^2\{W_r\} = V_r\{z_1\} \\ &\vdots \\ \{z_{L-1}\} &= V_r^{L-1}\{W_r\} = V_r\{z_{L-2}\} \\ \{z_L\} &= V_r^L\{W_r\} = V_r\{z_{L-1}\} \end{aligned} \quad (31)$$

แทนสมการที่ (30) เขียนใหม่ได้เป็น

$$[\beta_0]\{z_0\} + [\beta_1]\{z_1\} + \dots + [\beta_{L-1}]\{z_{L-1}\} = -V_r\{z_{L-1}\} \quad (32)$$

หรือ

$$\begin{bmatrix} -[\beta_{L-1}] & -[\beta_{L-2}] & \dots & -[\beta_1] & -[\beta_0] \\ [I] & [0] & \dots & [0] & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [I] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{z_{L-1}\} \\ \{z_{L-2}\} \\ \vdots \\ \{z_0\} \end{Bmatrix} = V_r \begin{Bmatrix} \{z_{L-1}\} \\ \{z_{L-2}\} \\ \vdots \\ \{z_0\} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

เรียกว่า "companion matrix equation of the eigenproblem" ซึ่งเป็นสมการที่อยู่ในรูปปัญหาแบบไอเกนมาตรฐาน

$$[[A] - \lambda[I]]\{x\} = \{0\} \quad (34)$$

ซึ่งเราสามารถนำไปใช้หาค่า V_r และ $\{z_k\}$ (ไอเกนแวลูและไอเกนเวกเตอร์) โดยที่ไอเกนแวลูมีความสัมพันธ์กับรากของระบบเป็น

$$V_r = e^{s\Delta t} \quad (35)$$

ส่วนเมตริกซ์ $[W]$ หาได้จาก q แถวสุดท้ายของไอเกนเวกเตอร์ในสมการที่ (34) ซึ่งจะต้องหาทั้งหมด $2N$ ครั้ง

$$\begin{aligned} [W] &= [\{W_1\} \quad \{W_2\} \quad \dots \quad \{W_{2N}\}] \\ &= [\{z_0\}_1 \quad \{z_0\}_2 \quad \dots \quad \{z_0\}_{2N}] \end{aligned} \quad (36)$$

มาถึงตอนนี้เราจะสามารถหาค่าเมตริกซ์ที่ไม่ทราบค่าเกือบทั้งหมดแล้ว เหลือเพียงเมตริกซ์ $\{A_{j1}\}$ เท่านั้น ซึ่งเราจะหาได้จากสมการซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเมตริกซ์ดังต่อไปนี้

$$\begin{Bmatrix} \{h_j(0)\} \\ \{h_j(\Delta t)\} \\ \vdots \\ \{h_j(L\Delta t)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [W] & [V]^0 \\ [W] & [V]^1 \\ \vdots & \vdots \\ [W] & [V]^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_1A_{j1} \\ {}_2A_{j1} \\ \vdots \\ {}_{2N}A_{j1} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปตัวแปรเมตริกซ์เป็น

$$\begin{Bmatrix} \{H_j\} \\ \{A_{j1}\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [W_v] \\ [V] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A_{j1}\} \\ \{A_{j1}\} \end{Bmatrix} \quad (38)$$

ซึ่งเราจะหาค่าเมตริกซ์ $\{A_{j1}\}$ ได้โดยใช้วิธีเดียวกับการหาค่าเมตริกซ์สัมประสิทธิ์ของสมการเมตริกซ์โพลีโนเมียล

$$\{A_{j1}\} = ([W_v]^H [W_v])^{-1} [W_v]^H \{H_j\} \quad (39)$$

โดยที่ $[]^H$ คือ Hermitian transpose

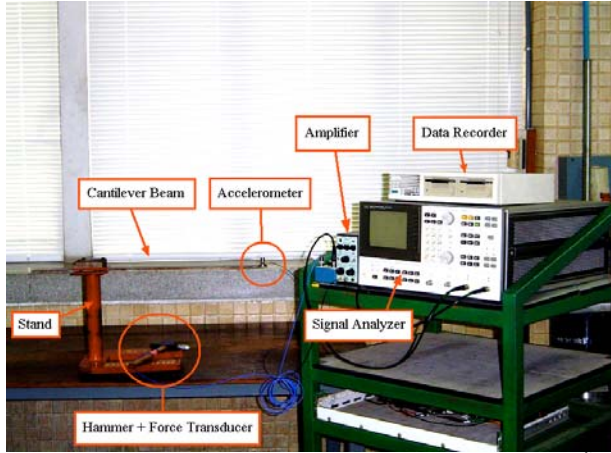
จะเห็นว่าค่า $\{A_{j1}\}$ จะแปรผันตาม $\{H_j\}$ ซึ่งเป็นเมตริกซ์อิมพัลส์ที่ได้จากการวัดที่จุดที่ "j" และในกรณีที่มีจุดวัดหลายจุด เราสามารถหาค่า $\{A_{j1}\}$ ที่ $j = 1, 2, \dots, p$ ได้ โดยการเปลี่ยน $\{H_j\}$ ให้สัมพันธ์กับจุดวัดที่เราต้องการ

เทคนิคนี้จะสามารถหาค่ารากของระบบที่เป็นรากซ้ำและรากที่อยู่ชิดกันมากๆ ได้ ซึ่งถือว่าเป็นข้อดีของวิธีนี้ ส่วนข้อได้เปรียบอย่างเห็นได้ชัดสำหรับเทคนิคนี้คือสามารถใช้วิเคราะห์ระบบที่มีแรงกระตุ้นและจุดวัดสัญญาณหลายๆ จุดพร้อมกันได้ (MIMO) และไม่จำเป็นต้องใช้แรงกระตุ้น หรือจุดวัดสัญญาณครบทุกจุด ซึ่งหากเราเก็บข้อมูลโดยใช้แรงกระตุ้น 1 จุด และจุดวัดสัญญาณ 1 จุด (SISO) ก็จะเหมือนกับการหาโมดัลพารามิเตอร์ด้วยเทคนิคเอกโปเนนเชียลเชิงซ้อนหรือหากใช้จำนวนจุดแรงกระตุ้น 1 จุด ส่วนจุดวัดสัญญาณหลายจุด (SIMO) เทคนิคนี้ก็จะเหมือนกับการหาโมดัลพารามิเตอร์ด้วยเทคนิคกำลังสองน้อยสุดเอกโปเนนเชียลเชิงซ้อน ซึ่งจะเห็นว่ามีความยืดหยุ่นเป็นอย่างมาก อีกทั้งไอเกนเวกเตอร์ที่คำนวณได้จากผลการทดสอบค่อนข้างให้ความถูกต้อง (Mass normalized) ดีกว่าเทคนิคอื่น เช่น เทคนิคอิมพัลส์

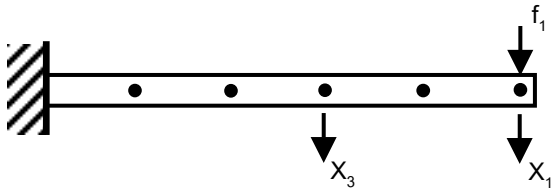
3. การทดสอบโมดัลของคานยื่น

เพื่อแสดงประสิทธิภาพของเทคนิคโพลีเรเฟอเรนซ์เพื่อใช้ในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ทางโหมดของระบบโครงสร้างทางกล ในงานนี้เลือกใช้โครงสร้างแบบคานเหล็กยื่นซึ่งมีความยาว 510 มม. หนา 6 มม. กว้าง 45 มม. ทำการแบ่งจุดบนคานออกเป็น 5 จุด โดยจุดแรกห่างจากปลายคานเท่ากับ 10 มม. และระยะห่างถึงจุดต่อๆ มาเท่าๆ กันคือ 100 มม. ดังแสดงการจับยึดคานในรูปที่ 1 ซึ่งชุดทดสอบประกอบด้วยตัวห้ำสัญญาณแรงที่ค้อนเคาะ (Impact hammer) และตัวห้ำสัญญาณความเร่ง (Accelerometer) ที่ติดบนคาน และผ่านสัญญาณที่วัดได้ทั้งสองเข้าอุปกรณ์ขยายสัญญาณก่อนเข้าเครื่องวิเคราะห์สัญญาณ (Dynamic analyzer) รูปที่ 2 แสดงตำแหน่งการแบ่งจุดบนคานทดสอบ เนื่องจากการทดสอบนี้เป็นโครงสร้างขนาดเล็กจะทำการหาพารามิเตอร์โหมดด้วยเทคนิคโพลีเรเฟอเรนซ์ SIMO ก็เพียงพอในการสร้างแบบจำลองคณิตศาสตร์ทางโหมด ซึ่งผลจากการคำนวณจากโปรแกรมแสดงค่าพารามิเตอร์โหมดในตารางที่ 1 และผลการพลอต FRF ที่ได้จากการสร้างแบบจำลองกับจากการทดสอบจริงได้เปรียบ

เทียบกันดังในรูปที่ 3 และ 4 ซึ่งมาจากการเคาะใส่แรงอ้างอิงที่จุด 1 ทั้งคู่และวัดสัญญาณออกจากจุด 1 และ จุด 3 ตามลำดับ (FRF11, FRF13) ซึ่งข้อมูลทางโหมดจำนวน 10 โหมดแรกถูกใช้เพื่อสร้างแบบจำลอง แต่โหมดที่เป็นโหมดการดัดตัว (Bending) จะแสดงให้เห็นเพียง 5 โหมดเท่านั้นดังในรูป และแบบจำลองให้ผลสอดคล้องกับผลการทดสอบจากระบบจริงได้ดีในแง่ของความถูกต้องทางโหมด และเทอมเศษเหลือที่ใช้แสดงรูปร่างการสั่นของโครงสร้าง



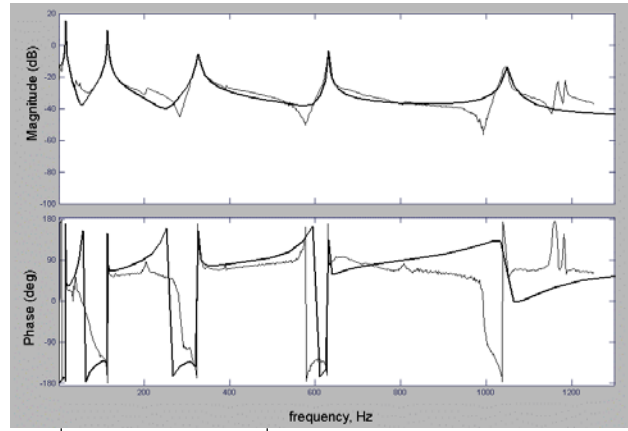
รูปที่ 1 ชุดอุปกรณ์ทดสอบคานยื่นเพื่อหาฟังก์ชันตอบสนองความถี่ (FRF) จากทั้ง 5 จุดโหนดบนคาน



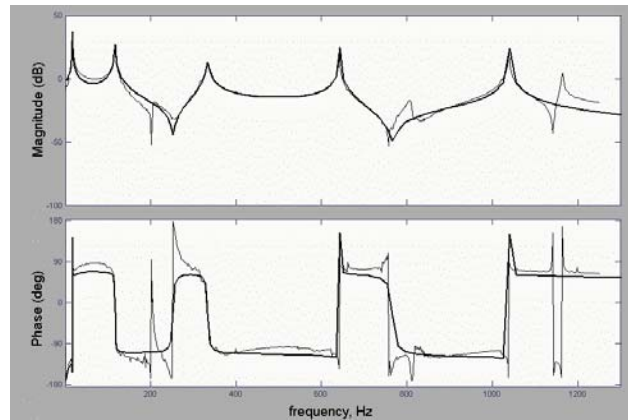
รูปที่ 2 แสดงจุดวัดที่แบ่งทั้ง 5 จุดโหนดของคานยื่นโดยตำแหน่งที่จุด 1 เป็นตำแหน่งใส่แรงกระทำอ้างอิง

ตารางที่ 1 ตัวแปรทางโหมดที่ได้จากเทคนิคโพลีเรเฟอเรนซ์แบบ SIMO

ลำดับโหมด	ความถี่ธรรมชาติ, ω_r (Hz)	ค่าสัดส่วนการหน่วง, Z_r	โหนดมวล, S_r	เทอมเศษเหลือโหมด A_{r11}
1	17.52	0.01784	-1.964 ± 110.1i	-4.18 ± 10.31i
2	114.7	0.00563	-4.06 ± 721i	-9.94 ± 6.29i
3	205.8	0.0216	-27.9 ± 1293i	-0.424 ± 0.1881i
4	326.4	0.01005	-20.6 ± 2051i	-9.45 ± 4.29i
5	390.8	0.00736	-18.07 ± 2455i	-0.0249 ± 0.00273i
6	631.3	0.001671	-6.63 ± 3967i	-3.02 ± 2.97i
7	813.2	0.0111	-56.7 ± 5109i	-0.1379 ± 0.18951i
8	1048.8	0.00419	-27.7 ± 6590i	2.3671 ± 4.89i
9	1166.7	0.00251	-18.39 ± 7330i	-0.984 ± 0.6354i
10	1184.5	0.000743	-5.53 ± 7442i	-0.358 ± 0.1373i



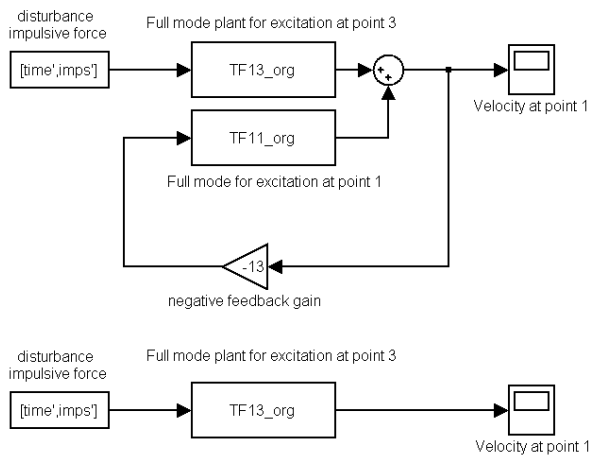
รูปที่ 3 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF11 เส้นทับแทนการทำนายระบบจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ทางโหมด เส้นบางผลจากการทดสอบจริง



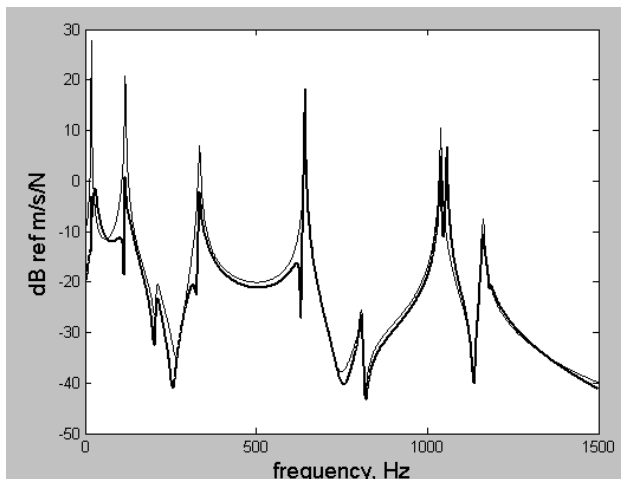
รูปที่ 4 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF13 เส้นทับแทนการทำนายระบบจากแบบจำลองคณิตศาสตร์ทางโหมด เส้นบางผลจากการทดสอบจริง

4. การจำลองควบคุมการสั่นแบบป้อนกลับความเร็วค่าลบ

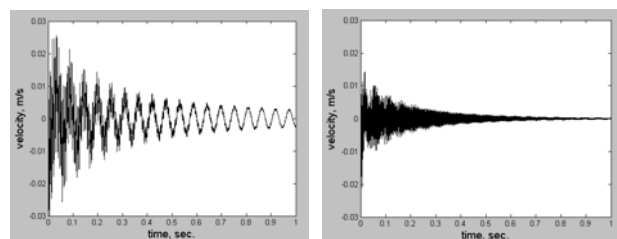
ในบางลักษณะงานควบคุมการสั่นแบบแยกที่พีที่ต้องการความถูกต้องของแบบจำลองคณิตศาสตร์ทางโหมดเพื่อการสร้างคำสั่งสัญญาณควบคุมการสั่น แบบจำลองที่สร้างจากข้อมูลการทดสอบระบบจริงจะให้ประสิทธิภาพในงานควบคุมบางลักษณะที่ดีกว่า ดังตัวอย่างที่นำเสนอต่อไปนี้จะเป็นรูปแบบของโครงสร้างคานยื่นที่สมมติให้ว่า ระบบมีการรบกวนให้เกิดการสั่นที่ตำแหน่งจุด 3 บนคานยื่น (รูปที่ 2) และการควบคุมกระทำที่ตำแหน่งปลายคานหรือตำแหน่งจุด 1 ซึ่งจะทำให้การหยังสัญญาณออกจากจุด 1 และป้อนกลับค่าความเร็วค่าลบจากจุดนี้เป็นคำสั่งแรงควบคุม หรือที่ทราบทั่วไปในเทคนิคป้อนกลับความเร็วค่าลบ [7] ซึ่งแสดงแผนภาพการควบคุมดังในรูปที่ 5 ซึ่งเมื่อแสดงการตอบสนองความถี่ของระบบที่ไม่มีมีการควบคุมและมีการควบคุมการสั่นเทียบกันในรูปที่ 6 และเช่นเดียวกันแต่แสดงการตอบสนองในแกนเวลาในรูปที่ 7



รูปที่ 5 แผนภาพกล่องจาก Simulink MATLAB (บน) แทนระบบที่ถูกควบคุมด้วยการป้อนกลับความเร็วค่าลบกระตุ้นควบคุมที่ปลายคานซึ่งมีการรบกวนที่จุดที่ 3 (ล่าง) ระบบที่ไม่มีการควบคุม



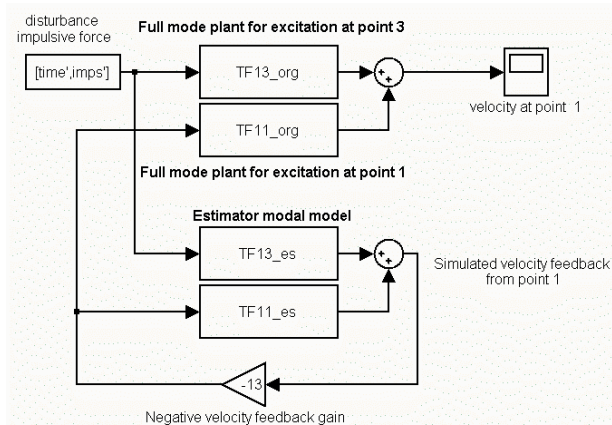
รูปที่ 6 แสดงฟังก์ชันตอบสนองความถี่ของแบบจำลองระบบในรูปที่ 5 โดยเส้นทึบคือระบบที่มีการควบคุม เส้นบางคือระบบที่ไม่มีการควบคุม



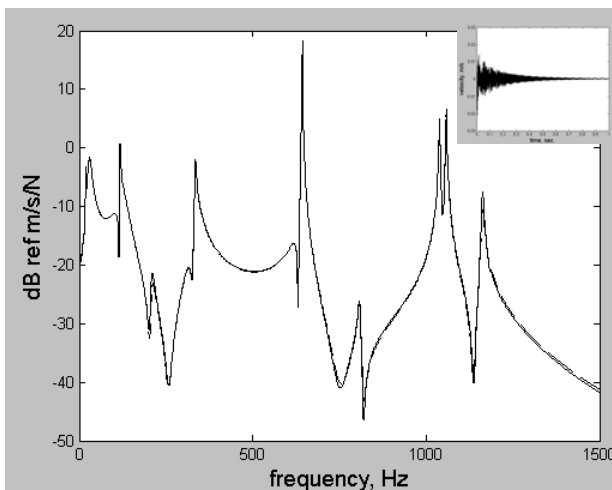
รูปที่ 7 การตอบสนองอิมพัลส์ (ซ้าย) ระบบไม่ได้ควบคุม (ขวา) ระบบถูกควบคุม ตามรูปที่ 5

ซึ่งแผนภาพการควบคุมในรูปที่ 5 ถือเป็นการควบคุมที่ใช้ผลการตอบสนองจริงมาทำการป้อนกลับควบคุมและใช้เป็นผลตอบสนองอ้างอิงกับแบบจำลองอื่นๆ ต่อไป แต่ถ้าเราให้โจทย์ว่าโครงสร้างนี้ไม่สามารถวัดสัญญาณที่ปลายคานหรือจุดที่ 1 ได้ แต่สามารถวัดสัญญาณที่เข้รบกวนที่จุดที่ 3 ได้ ฉะนั้นแล้วจากสัญญาณรบกวนเข้รบบจริงจะนำสัญญาณรบกวนนี้มาสร้างสัญญาณจำลองความเร็วที่จุดที่ 1 ซึ่งอาศัยแบบจำลองคณิตศาสตร์ทางโหมดที่ได้ทำการประมาณหามาในการทดสอบหัวข้อก่อนนี้ ซึ่งรูปแบบการทดสอบประสิทธิภาพการจำลอง

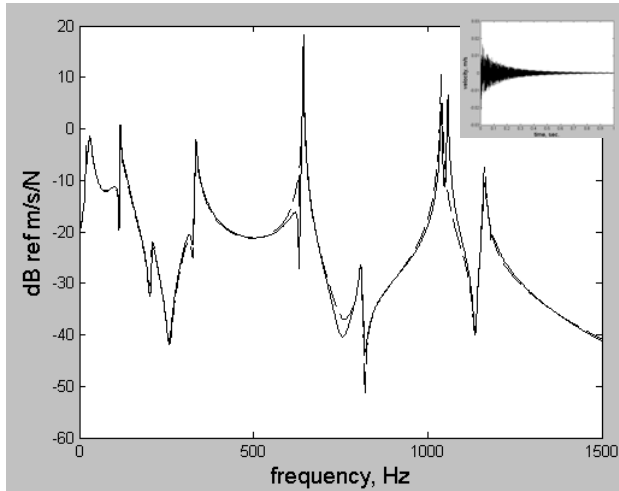
สัญญาณควบคุมจะแสดงผ่านหลายรูปแบบของแบบจำลอง โดยแบบจำลองที่ 1 จะให้มาใช้จำนวนโหมดทั้งหมด 5 โหมดจากแบบจำลองเต็ม 10 โหมดเพื่อดูผลจากการละเลยโหมดความถี่สูงหรือโหมดที่ไม่เด่นอื่นๆ ส่วนแบบจำลองที่ 2 จะลดจำนวนโหมดที่ใช้ลงเหลือเพียง 3 โหมดในการสร้างแบบจำลองควบคุม แบบจำลองที่ 3 จะใช้ผลจากการจำลองแบบด้วยวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์มาสร้างแบบจำลองควบคุม ซึ่งแสดงค่าตัวแปรโหมดจากการคำนวณในตารางที่ 2 และแบบจำลองที่ 4 จะเป็นแบบจำลองที่ใช้จำนวนโหมด 5 โหมดแต่สองโหมดแรกมีการเลื่อนไม่ตรงกับระบบจริงโดยให้ความถี่โหมดเป็น 20 และ 150 Hz ตามลำดับ (เทียบกับค่าโหมดในตารางที่ 1)



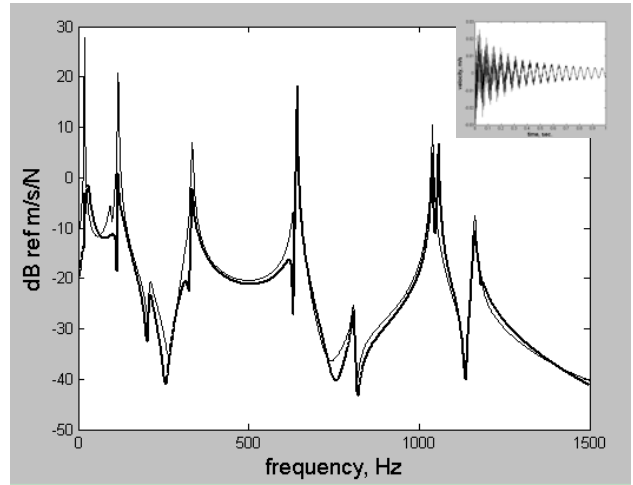
รูปที่ 8 ระบบที่ใช้ตัวควบคุมที่สร้างจากโหมดการสั่น 5 โหมดแรกเพื่อควบคุมการสั่น



รูปที่ 9 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF13 แสดงเทียบกันระหว่าง (เส้นเต็ม) ตัวควบคุมแบบ 10 โหมด (เส้นประ) ตัวควบคุมแบบ 5 โหมด (กรอบเล็ก) การตอบสนองอิมพัลส์



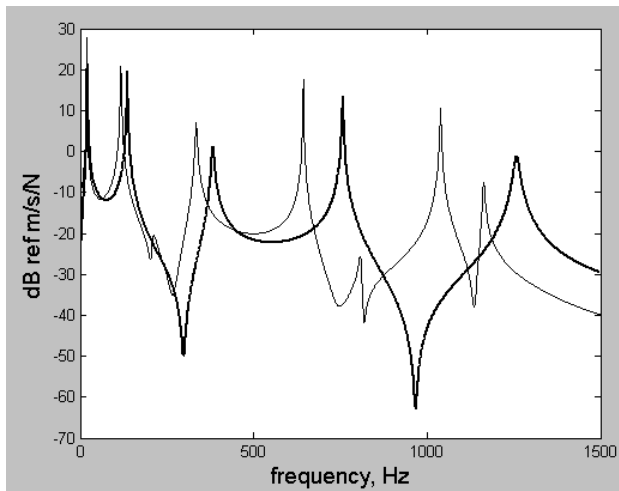
รูปที่ 10 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF13 แสดงเทียบกันระหว่าง (เส้นเต็ม) ตัวควบคุมแบบ 10 โหมด (เส้นประ) ตัวควบคุมแบบ 3 โหมด (กรอบเล็ก) การตอบสนองอิมพัลส์



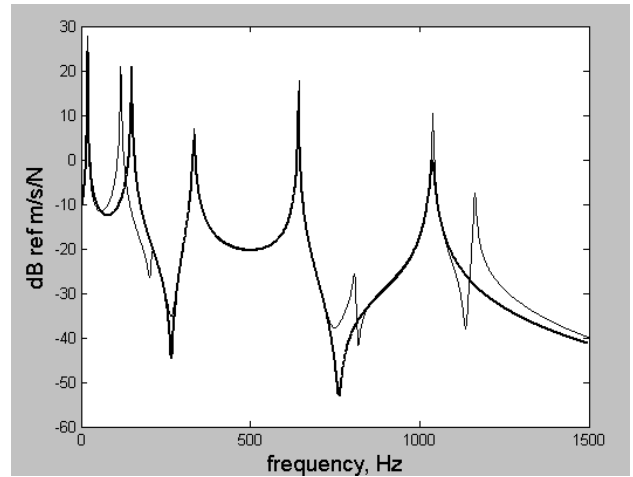
รูปที่ 12 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF13 กรณีตัวควบคุมสร้างจากแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์ (เส้นทึบ) ตัวควบคุม 10 โหมด (เส้นบาง) ตัวควบคุมจากไฟไนต์อีลิเมนต์ (กรอบเล็ก) การตอบสนองอิมพัลส์

ตารางที่ 2 ตัวแปรทางโหมดจากวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์

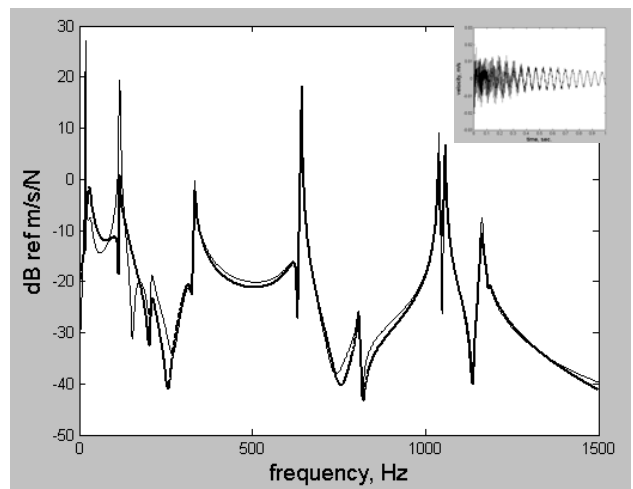
ลำดับโหมด	ความถี่ธรรมชาติ, ω_r (Hz)	อีลิเมนต์ในโอแกเนตริกซ์				
1	21.75	1.999	2.002	2.015	2.034	1.818
2	136.4	1.394	-0.0375	-0.981	-1.362	-0.948
3	383.2	0.843	-1.293	-0.682	1.085	1.208
4	757.8	0.377	-1.261	1.349	-0.0214	-1.370
5	1262	0.0712	-0.367	0.835	-1.282	1.648



รูปที่ 11 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF13 (เส้นทึบ) ระบบจากแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์ (เส้นบาง) ระบบจากเทคนิคโพลีเรฟเฟอร์เรนซ์



รูปที่ 13 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF13 (เส้นทึบ) ระบบจากแบบจำลองที่เลื่อนสองโหมดแรก (เส้นบาง) ระบบจากเทคนิคโพลีเรฟเฟอร์เรนซ์



รูปที่ 14 ฟังก์ชันตอบสนองความถี่ FRF13 กรณีตัวควบคุมสร้างจากแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์ (เส้นทึบ) ตัวควบคุม 10 โหมด (เส้นบาง) ตัวควบคุม 5 โหมด โดยสองโหมดแรกถูกเลื่อน (กรอบเล็ก) การตอบสนองอิมพัลส์

จากผลการจำลองเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่ากรณีแบบจำลองที่ 1 และ 2 ซึ่งใช้จำนวนโหมดที่สร้างตัวควบคุมป้อนกลับความเร็วค่าลบในจำนวนโหมดที่จำกัด (5 และ 3 โหมดแรกตามลำดับ) ยังคงสามารถให้ความถูกต้องของแบบจำลองที่ควบคุมการสั่นได้ดีของระบบอ้างอิงที่แทนด้วย 10 โหมดการสั่น แต่สำหรับแบบจำลองที่ 3 และ 4 ที่ได้จากแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์และแบบจำลองที่ใช้ 5 โหมดการสั่นแรกโดยทั้งสองแบบจำลองมีข้อมูลทางโหมดไม่ตรงกับระบบจริงกล่าวคือ แบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์ให้ผลของการสั่นในทุกๆ โหมดออกไปจากค่าจริงทั้งนี้เนื่องจากสภาวะขอบเขตการทดสอบจริงของคานยันไม้ได้มีความแข็งแรงมากตามทฤษฎี ส่วนกรณีแบบจำลอง 5 โหมดได้ทำการเลื่อนความถี่ธรรมชาติของ 2 โหมดแรกออกไป ซึ่งแบบจำลองไฟไนต์อีลิเมนต์ไม่สามารถทำการควบคุมการสั่นของระบบได้ ส่วนแบบจำลองเลื่อนโหมดจะสามารถควบคุมโหมดที่ทำนายถูกต้องได้คือ โหมด 3 แต่โหมด 1 และ 2 จะไม่สามารถควบคุมได้เพราะข้อมูลทางโหมดในแบบจำลองไม่ถูกต้อง

5. สรุป

การพัฒนาแบบจำลองคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของโครงสร้างหนึ่งบางที่มีการสั่นเกิดขึ้น โดยแบบจำลองทางโหมดคือแบบจำลองที่นำมาใช้อธิบายโครงสร้างที่มีการสั่นได้ดี และมีความซับซ้อนของแบบจำลองไม่มาก ข้อมูลทางโหมดการสั่น เช่น ความถี่ธรรมชาติ ค่าอัตราส่วนการหน่วง และเทอมเศษเหลือหรือสัมพันธ์กับรูปร่างการสั่นที่แต่ละความถี่ธรรมชาติ โดยในบทความนี้ได้ใช้เทคนิคโพลีเรฟเฟอร์เรนซ์เพื่อดึงข้อมูลเหล่านี้จากการทดสอบบนอิมพัลส์มาสร้างแบบจำลองซึ่งให้การหาเทอมเศษเหลือสามารถแสดงความสอดคล้องกับผลการทดสอบ (Normalized eigenvectors) โดยความสำคัญของข้อมูลทางโหมดที่ถูกต้องได้ถูกนำเสนอผ่านการจำลองเชิงตัวเลขของการควบคุมการสั่นแบบแอกทีฟด้วยตัวควบคุมป้อนกลับความเร็วค่าลบ ซึ่งในผลการจำลองแสดงให้เห็นว่าระบบที่มีการจำลองแบบคณิตศาสตร์ได้สอดคล้องกับระบบทดสอบจริงสามารถนำมาใช้สร้างตัวควบคุมเพื่อลดการสั่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ

6. กิตติกรรมประกาศ

ผู้เขียนที่หนึ่งขอขอบคุณ ศูนย์วิจัยวิศวกรรมคำนวณขั้นสูง ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ ที่ให้ทุนเป็นผู้ช่วยวิจัยในงานวิจัยนี้

เอกสารอ้างอิง

- [1] L. Meirovitch, H. Barun and H. Oz, 1983, 'A comparison of control techniques for large flexible systems.', Journal of Guidance and Control, Vol. 6, p302-310.
- [2] D. J. Ewins, 2000 Modal Testing: Theory, Practice and Application, Second Edition, Research Studies Press, Ltd., Hertfordshire.
- [3] S. R. Ibrahim and E. C. Mikulcik, 1977 'A Method for The Direct Identification of Vibration Parameters From The Free

Response', Shock and Vibration Bulletin, No. 47, Part 4, September, p183-198.

[4] Havard Vold, John Kundat, G. Thomas Rocklin and Richard Russell, 1982 'A Multi-Input Modal Estimation Algorithm for Mini-Computers', SAE Paper Number 820194, 1982

[5] Nuno Manuel Mendes Maia, 1998 Theoretical and Experimental Modal Analysis, Research Studies Press LTD.

[6] Filip Deblauwe and Havard Vold, 1987 'The Polyreference Time Domain Technique', Proceedings of the Fifth International Modal Analysis Conference, London, England, p832-845.

[7] M. J. Balas, 1979, 'Direct velocity feedback control of large space structures.', Journal of Guidance and Control, Vol. 2, No. 1, p252-253.