

การจำลองวิสโคอีลาสติกไม่เชิงเส้นของยางเติมผงคาร์บอนดำภายใต้ภาระพลวัต

Nonlinear Viscoelastic Modeling of Carbon Black Filled Rubber under Dynamic Loads

นิวัตร มูลปา

สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตภาคพายัพ 128 ถ.ห้วยแก้ว ต.ช้างเผือก อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50300

โทร 053221576, 053213112 ต่อ 2240 โทรสาร 053213183 Email: nmoonpa@hotmail.com

ธนู ฉุยฉาย ศิริศักดิ์ หาญชูวงศ์ และอริสรา ชัยกิตติรัตน

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ 1518 ถ.พิบูลสงคราม บางซื่อ กรุงเทพฯ 10800

บทคัดย่อ

การศึกษานี้เป็นการนำเสนอแบบจำลองพลวัตไม่เชิงเส้นหนึ่งมิติแบบใหม่ของยางเติมผงคาร์บอนดำโดยปรับปรุงแบบจำลองเคลวิน (วอยท์) ด้วยการแทนความหนืดของตัวหน่วงหนืดด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับสามของความเร็วและแทนสติเฟนของสปริงด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับสามของการจัด ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นสำหรับแบบจำลองนี้ได้แทนด้วยอนุกรมโวลเทอร์ราอันดับสาม ในที่นี้ยังได้นำเสนอวิธีหาค่าพารามิเตอร์ใหม่โดยใช้การกระตุ้นระบบซึ่งประกอบด้วยยางเติมผงคาร์บอนดำและมวลด้วยสัญญาณรบกวนขาวเกาส์และเทคนิคคอร์เลชัน แล้วแทนค่าพารามิเตอร์ที่หาได้ลงในแบบจำลองเพื่อใช้จำลองการตอบสนองพลวัตของชิ้นทดสอบยางเติมผงคาร์บอนดำภายใต้ภาระไซนูซอยด์ลโดยให้แอมพลิจูดแตกต่างกันที่ความถี่ที่ แบบจำลองที่ใช้ออนุกรมโวลเทอร์ราอันดับสามสามารถทำนายการตอบสนองไซนูซอยด์ลได้และมีแนวโน้มเหมือนกับผลที่ได้จากการทดลอง แต่อย่างไรก็ตามแบบจำลองนี้ยังไม่ให้ความแม่นยำเชิงปริมาณในการทำนายการตอบสนองไซนูซอยด์ลที่แอมพลิจูดสูง

ABSTRACT

In this work, a new one dimension nonlinear dynamic model of a carbon black filled rubber was proposed by develop the Kelvin (Voigt) model. The viscosity of the dashpot was assumed to be a third polynomial function of velocity and the stiffness of the spring was a third order polynomial function of displacement. The solution of nonlinear differential equation for this model was represented by the third order Volterra series. A new approach for parameter identification was proposed in this study using Gaussian white noise excitation and correlation technique. The model with the determined parameters was then used to simulate the dynamic response of the carbon black filled rubber sample under sinusoidal force with varying amplitude at a constant frequency. The sinusoidal response predicted by the model with the third order Volterra series was in the same trend as observed

in the experiment. However, it could not yet provided in quantitatively accurate prediction of the sinusoidal response under the large amplitude.

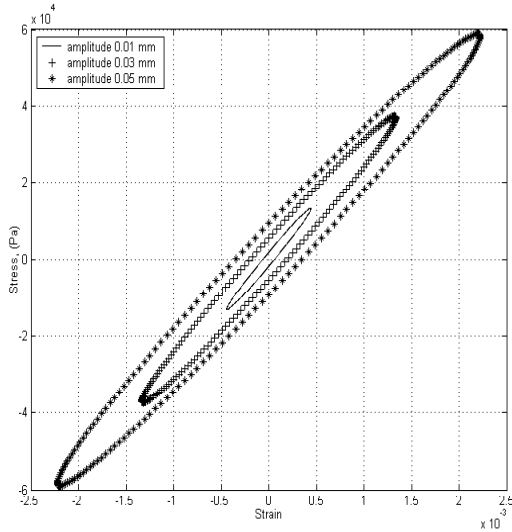
1. บทนำ

ยางเติมผงคาร์บอนดำได้ถูกนำมาใช้งานวิศวกรรมอย่างกว้างขวางโดยเฉพาะอย่างยิ่งภายใต้ภาระพลวัต ยกตัวอย่างเช่น ยางของยานพาหนะและตัวรองรับการสั่นสะเทือน ดังนั้นสมบัติพลวัตของวัสดุชนิดนี้จึงเป็นที่สนใจของวิศวกร แต่สมบัติพลวัตของวัสดุชนิดนี้มีความซับซ้อนเพราะว่ามีพฤติกรรมไม่เชิงเส้น ซึ่งมีความยุ่งยากในการหาแบบจำลองคณิตศาสตร์ให้เหมาะสมและมีความถูกต้องต่อการตอบสนองพลวัต ที่ผ่านมามีพฤติกรรมพลวัตของวัสดุนี้ถูกสังเกตโดยนักวิจัยหลายท่าน เช่น Kim and Yaun [1], Ulmer [2], และ Nasif et. al. [3]. โดยให้การเปลี่ยนแปลงล่วงหน้าร่วมกับการสั่นด้วยฮาร์โมนิกน้อยๆ จากการทดสอบพบว่าค่าโมดูลัสเชิงซ้อนขึ้นกับขนาดการเปลี่ยนแปลงหน้าแอมพลิจูดและความถี่

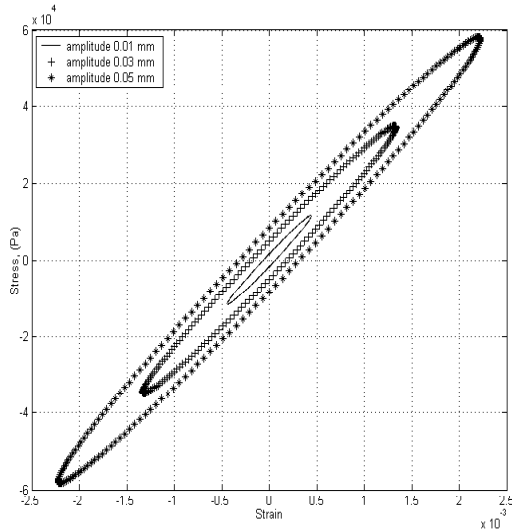
วัตถุประสงค์ของการศึกษานี้คือสังเกตพฤติกรรมเชิงกลของยางเติมผงคาร์บอนดำภายใต้ภาระพลวัตแล้วพัฒนาแบบจำลองคอนสตีติวทีฟไม่เชิงเส้น แล้วนำเสนอวิธีหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองไม่เชิงเส้นโดยใช้วิธีการวิเคราะห์โมดัล ในที่นี้ได้กำหนดยางเติมผงคาร์บอนดำและมวลเป็นระบบพลศาสตร์ที่มีความจำและแทนการตอบสนองในรูปแบบของอนุกรมโวลเทอร์รา การทดลองได้ใช้การกระตุ้นระบบด้วยแรงแบบสัญญาณรบกวนขาวเกาส์และหาการตอบสนองอิมพัลส์หลายมิติด้วยเทคนิคคอร์เลชัน ซึ่งเทคนิคนี้ได้ถูกใช้อย่างแพร่หลายในสาขา โครงสร้างพลศาสตร์ไม่เชิงเส้น แต่ไม่พบว่าถูกนำมาใช้ทำนายการตอบสนองไม่เชิงเส้นของยาง [4] การศึกษานี้ยังได้ใช้แบบจำลองทำนายการตอบสนองของยางเติมผงคาร์บอนดำภายใต้ภาระไซนูซอยด์ลโดยเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูดที่ความถี่ที่ พฤติกรรมที่ขึ้นกับความถี่สามารถแทนด้วยแบบจำลองรีโอโลยีเชิงเส้นแต่พฤติกรรมที่ขึ้นกับแอมพลิจูดไม่สามารถทำนายได้ดังแสดงในรูป 1 และรูป 2

2. แบบจำลองไม่เชิงเส้นที่ใช้อนุกรมโวลเทอร์รา

แบบจำลองเคลวิน (วอยท์) ไม่เชิงเส้นในที่นี้ประกอบด้วยตัว
หน่วงหนืดไม่เชิงเส้นและสปริงไม่เชิงเส้นต่อขนานกัน ค่าคงที่ของสปริง



รูป 1 การตอบสนองไขว้ของวัสดุภายใต้การสั่นสองหน้า
ร่วมกับภาวะพลวัตจากการทดลอง



รูป 2 การตอบสนองไขว้ของวัสดุภายใต้การสั่นสองหน้า
ร่วมกับภาวะพลวัตจากแบบจำลองแมกซ์เวลล์ทั่วไป
สี่เอลิเมนต์

k และการหน่วง c ได้สมมติให้เป็นฟังก์ชันพหุนามอันดับสามของการ
ขจัด y และความเร็ว \dot{y} ตามลำดับดังนี้

$$k = \sum_{i=1}^3 k_i y^{i-1}, \quad c = \sum_{i=1}^3 c_i \dot{y}^{i-1} \quad (1)$$

ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของระบบคือ

$$\sum_{i=1}^3 c_i \dot{y}^i + \sum_{i=1}^3 k_i y^i = f(t) \quad (2)$$

และได้สมมติผลเฉลยของสมการ (2) ด้วยอนุกรมโวลเทอร์ราอันดับสาม

$$y(t) = \sum_{n=1}^3 y_n(t) = \sum_{n=1}^3 H_n[f(t)] \quad (3)$$

$H_n[\]$ คือตัวดำเนินการโวลเทอร์ราอันดับ n (n^{th} order Volterra operator) เมื่อ

$$H_n[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) f_1(t-\tau_1) \dots f_n(t-\tau_n) \times d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (4)$$

ให้สัญญาณเข้าระบบแทนด้วย $f(t) = af(t)$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ จะได้
สัญญาณออกของระบบสามารถแทนด้วย

$$y(t) = \sum_{n=1}^3 y_n(t) = \sum_{n=1}^3 H_n[af(t)] = \sum_{n=1}^3 a^n H_n[f(t)] \quad (5)$$

แทนสมการ (5) ในสมการ (2) แล้วเปรียบเทียบกับอันดับสัมประสิทธิ์ a^n
จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามสมการ แล้วใช้การแปลงฟูริเยร์ในแต่ละ
สมการ จะได้ความสัมพันธ์ของสัญญาณเข้าและสัญญาณออกในโดเมน
ความถี่ดังนี้

$$Y_1(\omega) = H_1(\omega)F(\omega) \quad (6)$$

$$Y_2(\omega_1, \omega_2) = H_2(\omega_1, \omega_2)F(\omega_1)F(\omega_2) \quad (7)$$

$$Y_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3)F(\omega_1)F(\omega_2)F(\omega_3) \quad (8)$$

โดยที่

$$H_1(\omega) = \frac{Y_1(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k_1 + j\omega c_1} \quad (9)$$

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = -H_1(\omega_1 + \omega_2) [c_2 \dot{H}_1(\omega_1) \dot{H}_1(\omega_2) - k_2 H_1(\omega_1) H_1(\omega_2)] \quad (10)$$

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -H_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) [2c_2 \dot{H}_1(\omega_1) \times \dot{H}_2(\omega_1, \omega_2) + c_3 \dot{H}_1(\omega_1) \dot{H}_1(\omega_2) \dot{H}_1(\omega_3) + 2k_2 H_1(\omega_1) H_2(\omega_1, \omega_2) + k_3 H_1(\omega_1) H_1(\omega_2) \times H_1(\omega_3)] \quad (11)$$

ถ้าให้สัญญาณเข้าเป็น $f(t) = f_0 \sin \omega t$ การตอบสนองของระบบที่แทนด้วยอนุกรมโวลเทอร่าอันดับสามคือ

$$\begin{aligned} y(t) &= y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) \\ &= f_0 [H'_1(\omega) \sin \omega t + H''_1(\omega) \cos \omega t] + \frac{f_0^2}{2} \{ [H'_2(\omega, \omega) \times \sin 2\omega t + H''_2(\omega, \omega) \cos 2\omega t] + H'_2(\omega, \omega) \} \\ &\quad + \frac{f_0^3}{4} [H'_3(\omega, \omega, \omega) \sin 3\omega t + H''_3(\omega, \omega, \omega) \cos 3\omega t] \\ &\quad + \frac{3f_0^3}{8} [H'_3(\omega, \omega, -\omega) \sin \omega t + H''_3(\omega, \omega, -\omega) \cos \omega t] \end{aligned} \quad (12)$$

เมื่อ $H'_n []$ และ $H''_n []$ เป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติอันดับ n

3. การทดลอง

การทดลองได้ใช้ชิ้นทดสอบยางเติมผงคาร์บอนดำที่ผ่านกระบวนการอบคงรูป มีปริมาณคาร์บอนดำ 30.33% โดยน้ำหนัก มีรูปร่างตามมาตรฐาน ASTM D 412 สำหรับการทดสอบดึงแกนเดียว โดยได้แบ่งการทดลองเป็นแบบเรโซแนนท์ (Resonant) และไม่เรโซแนนท์ (Non-resonant) ภายใต้อุณหภูมิคงที่ การทดลองเรโซแนนท์เป็นการทดลองสำหรับหาค่าพารามิเตอร์ของแบบจำลองไม่เชิงเส้น ส่วนการทดลองไม่เรโซแนนท์ใช้เปรียบเทียบกับการจำลองเพื่อทำนายการตอบสนองพลวัตภายใต้การกระตุ้นด้วยแรงไขว้ชอยดัล การทดลองทั้งสองวิธีได้ใช้อุปกรณ์ได้แก่ ชุดเขย่า B&K (ประกอบด้วยตัวเครื่องรุ่น 4805 และชุดหัวรุ่น 4812) สัญญาณรบกวนขาวเกาส์กำเนิดจากเครื่องวิเคราะห์สัญญาณ Hewlett Packard รุ่น 3562A และขยายสัญญาณให้กับชุดเขย่าด้วยเครื่องขยายสัญญาณ B&K 2707 สัญญาณเข้าและสัญญาณออกวัดด้วยทรานส์ดิวเซอร์วัดแรง B&K 8201 และทรานส์ดิวเซอร์วัดความเร่ง B&K 4371 ตามลำดับ แล้วปรับปรุงสัญญาณด้วยชุดขยายประจุ (Charge amplitude) B&K 2635 ก่อนนำไปแสดงผลและบันทึกผลด้วยเครื่องวิเคราะห์สัญญาณ Yogogawa AR-1000 ส่วนฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติได้จากโปรแกรมที่เขียนขึ้นบนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลเพื่อวิเคราะห์สัญญาณด้วยเทคนิคคอร์เรชันและแปลงฟูรีเยร์หลายมิติเพื่อหาฟังก์ชันถ่ายโอนหลายมิติ

3.1 การทดลองเรโซแนนท์โดยใช้การกระตุ้นด้วยสัญญาณรบกวนขาวเกาส์

การทดลองนี้ได้ให้สัญญาณรบกวนขาวเกาส์กับระบบซึ่งประกอบด้วยชิ้นทดสอบยางยึดติดกับมวลทำให้มีการเปลี่ยนรูปลงหน้า 7 มม. แล้ววัดสัญญาณเข้าเป็นแรงและสัญญาณออกเป็นการขจัดและความเร็วเพื่อนำไปหาการตอบสนองอิมพัลด้วยเทคนิคคอร์เรชัน ซึ่งการตอบสนองอิมพัลอันดับแรกหาได้จากความสัมพันธ์

$$h_1(\tau_1) = \frac{1}{A} y_1(t) f(t - \tau_1) \quad (13)$$

เมื่อ A คือออโตคอร์เรลชัน $\phi_{xx}(\tau_1) = \overline{f(t)f(t - \tau_1)}$ [5] แล้วแปลงฟูรีเยร์จะได้สัญญาณที่มีขนาดคงที่ตลอดย่านความถี่ ส่วนฟังก์ชันถ่ายโอน $H_1(\omega_1)$ หาได้โดยการแปลงฟูรีเยร์หนึ่งมิติของ $h_1(\tau_1)$ จะได้ว่า

$$H_1(\omega_1) = \mathfrak{F}(h_1(\tau_1)) \quad (14)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$h_2(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2A^2} y_2(t) f(t - \tau_1) f(t - \tau_2) ; \tau_1 \neq \tau_2 \quad (15)$$

$$h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{3!A^3} y_3(t) f(t - \tau_1) f(t - \tau_2) f(t - \tau_3) ; \tau_1 \neq \tau_2 \neq \tau_3 \quad (16)$$

ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสองและอันดับสามหาได้จากการแปลงฟูรีเยร์สองและสามมิติตามลำดับ

$$H_2(\omega_1, \omega_2) = \mathfrak{F}(h_2(\tau_1, \tau_2)) \quad (17)$$

และ

$$H_3(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \mathfrak{F}(h_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3)) \quad (18)$$

3.2 การทดลองไม่เรโซแนนท์โดยใช้การกระตุ้นไขว้ชอยดัล

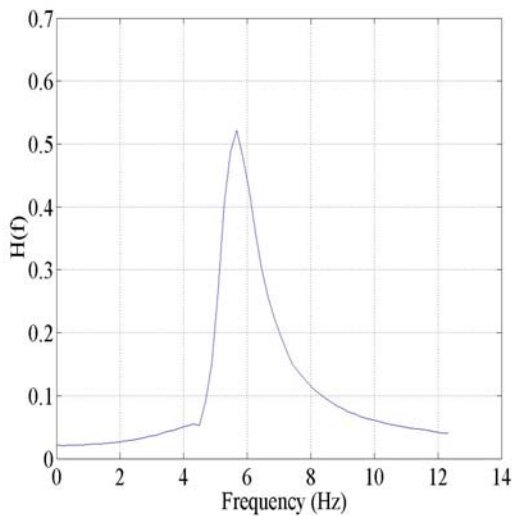
การทดลองนี้ได้ให้ภาระสถิตลงหน้าแบบดึง 7 มม. ร่วมกับการเปลี่ยนแปลงขนาดของภาระไขว้ชอยดัลภายใต้ความถี่คงที่ แล้ววัดสัญญาณเข้าและสัญญาณออกเป็นแรงและการขจัดด้วยอุปกรณ์การวัดชุดเดียวกันกับการทดลองเรโซแนนท์

4. การหาค่าพารามิเตอร์

จากสมการ (9), (10) และ (11) จะเห็นว่าแบบจำลองวิสโค-อีลาสติกนี้ประกอบด้วยพารามิเตอร์ 6 ค่า ได้แก่ $c_1, c_2, c_3, k_1, k_2, k_3$ ซึ่งหาค่าได้จากการฟิตเส้นโค้ง (Curve fitting) ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method) จากฟังก์ชันถ่ายโอนที่ได้จากการทดลองและจากการจำลองในแต่ละอันดับ และได้ค่าพารามิเตอร์ดังนี้ $c_1 = 2.835 \text{ Ns/m}$, $c_2 = 5.250 \text{ Ns}^2/\text{m}^2$, $c_3 = 50.351 \text{ Ns}^3/\text{m}^3$, $k_1 = 1589.530 \text{ N/m}$, $k_2 = -545.144 \text{ N/m}^2$ และ $k_3 = -502.220 \text{ N/m}^3$

5. ผลการศึกษาและการวิจารณ์

จากการจำลองการทดลองแบบเรโซแนนซ์ที่ผ่านมาได้ผลที่แสดงด้วยฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับหนึ่งจากการทดลองในรูป 3 และจากการจำลองในรูป 4 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสองจากการทดลองในรูป 5 และจากการจำลองในรูป 6 จะเห็นว่าฟังก์ชันถ่ายโอนจากการจำลองสามารถทำนายการตอบสนองรอบๆ บริเวณที่เกิดความถี่ธรรมชาติได้เช่นเดียวกับฟังก์ชันที่ได้จากการทดลอง ถึงแม้ว่าจะให้ขนาดไม่แม่นยำนัก ส่วนรูป 7 แสดงการตอบสนองไซนูซอยด์จากการทดลองที่มีความถี่ 15 Hz พบว่าวงรอบฮิสเทอรีซิส (Hysteresis loop) ไม่เป็นวงรีและมีมุมแหลมที่ปลาย และวงรอบฮิสเทอรีซิสจะมีความชันลดลงเมื่อแอมพลิจูดของภาระเพิ่มขึ้น ส่วนรูป 8 และรูป 9 แสดงถึงผลการจำลองภายใต้ภาระพลวัตโดยใช้อุณหภูมิโวลเทอร่าอันดับหนึ่งและอันดับสามตามลำดับ จะเห็นว่าแบบจำลองที่ใช้อุณหภูมิอันดับสามจะให้วงกลมฮิสเทอรีซิสไม่เป็นวงรีและความชันลดลงเมื่อแอมพลิจูดของภาระเพิ่มขึ้นเหมือนกับผลที่ได้จากการทดลอง และจะเห็นว่าแบบจำลองที่ใช้อุณหภูมิโวลเทอร่าอันดับสามสามารถทำนายการตอบสนองพลวัตภายใต้การเปลี่ยนรูปน้อยๆ ได้ดีเหมือนกับฮิสเทอรีซิสที่ได้จากการทดลอง แต่ที่ภายใต้แอมพลิจูดการเปลี่ยนรูปสูงๆ แบบจำลองไม่สามารถทำนายในเชิงปริมาณหรือให้ค่าที่ไม่ถูกต้องมากนัก



รูป 3 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับหนึ่งจากการทดลอง

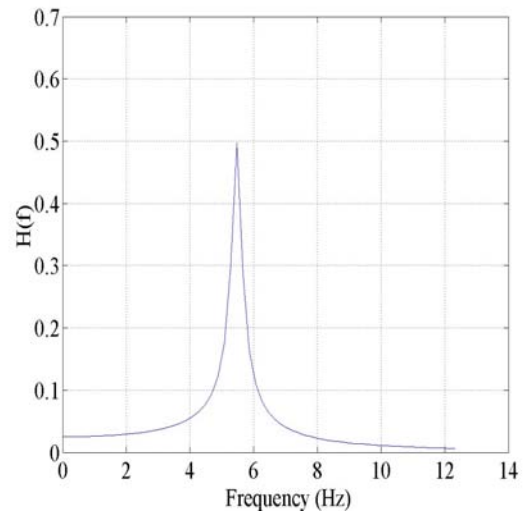
6. สรุปผลการศึกษา

แบบจำลองพลวัตไม่เชิงเส้นที่ได้จากการปรับปรุงแบบจำลองเคลวิน (วอยท์ท) โดยการแทนด้วยตัวหน่วงหนืดไม่เชิงเส้นและสปริงไม่เชิงเส้นต่อขนานกัน ค่าความหน่วงของตัวหน่วงหนืดถูกแทนด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับสามของความเร็ว ส่วนค่าสตีเฟนของสปริงไม่เชิงเส้นถูกแทนด้วยฟังก์ชันพหุนามอันดับสามของการขจัด ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นจากแบบจำลองรีโอโลยีแทนได้ด้วยอุณหภูมิโวลเทอร่าอันดับสาม แล้วหาค่าคงที่ของฟังก์ชันพหุนามโดยการทดลองเรโซแนนซ์ด้วยการกระตุ้นระบบด้วยสัญญาณรบกวนขาวเกาส์และใช้เทคนิคคอร์เรเลชันและการแปลงฟูริเยร์หลายมิติหาฟังก์ชันถ่าย

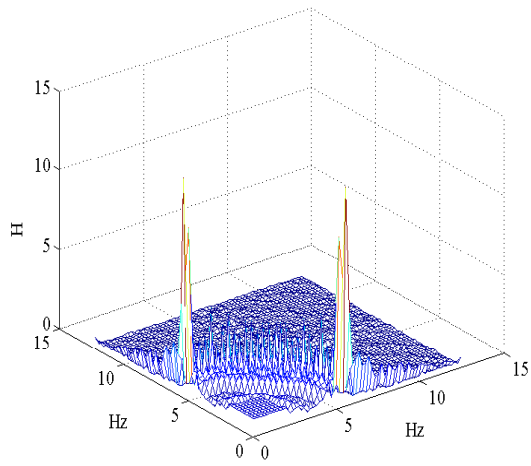
โอนแต่ละอันดับ จากการเปรียบเทียบผลการจำลองที่ได้จากการแทนค่าพารามิเตอร์ในแบบจำลองกับผลที่ได้จากการทดลองภายใต้ภาระไซนูซอยด์ภายใต้การเปลี่ยนแปลงแอมพลิจูดที่ความถี่คงที่ พบว่าผลการจำลองจากแบบจำลองที่ใช้อุณหภูมิโวลเทอร่าอันดับสามสามารถทำนายผลการทดลองที่แอมพลิจูดน้อยๆ ได้ดีและสามารถทำนายแนวโน้มได้ทุกค่าแอมพลิจูดแต่ไม่สามารถให้ค่าที่แม่นยำได้ที่แอมพลิจูดสูงๆ

เอกสารอ้างอิง

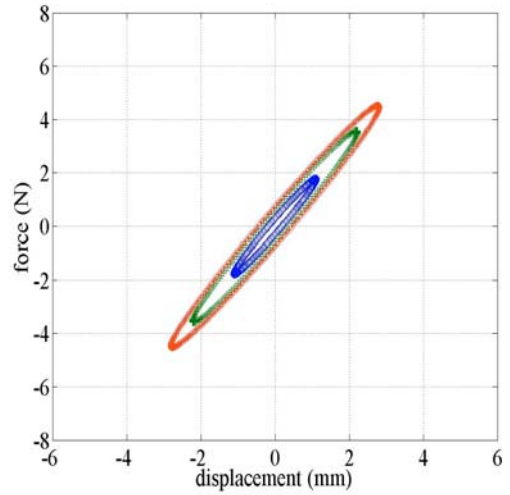
1. Kim, B. K. and Youn, S. K. (2001). "Archive of Applied Mechanics", 2001, 71, pp.748-763.
2. Ulmer, J. D. "Rubber Chemistry and Technology", 1996, 69, pp.15-47.
3. Nasif, A. D., Jones, D. I. G. and Henderson, J. P. "Vibration Damping," John Wiley & Sons, New York, 1985, pp.87-116.
4. Sjoberg, M. and Kari, L. "Polymer Testing", 2003, 22, pp.343-351.
5. Schetzen, M. (1980). "The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems", John Wiley & Sons, New York, 1980.



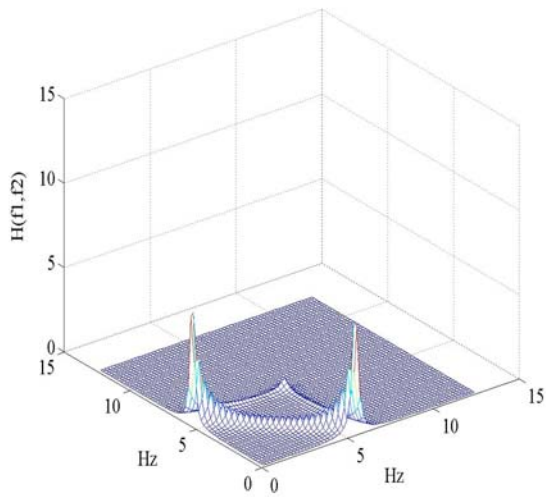
รูป 4 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับหนึ่งจากการจำลอง



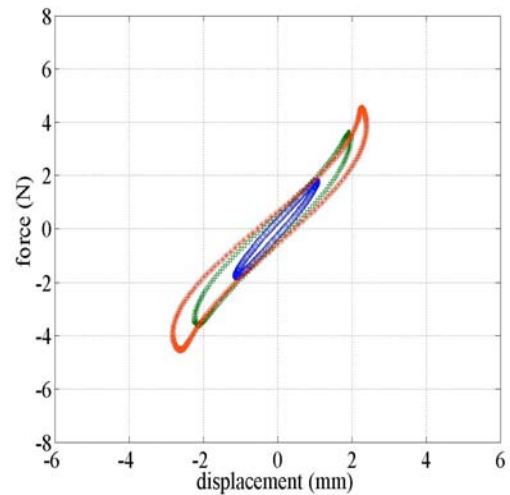
รูป 5 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสองจากการทดลอง



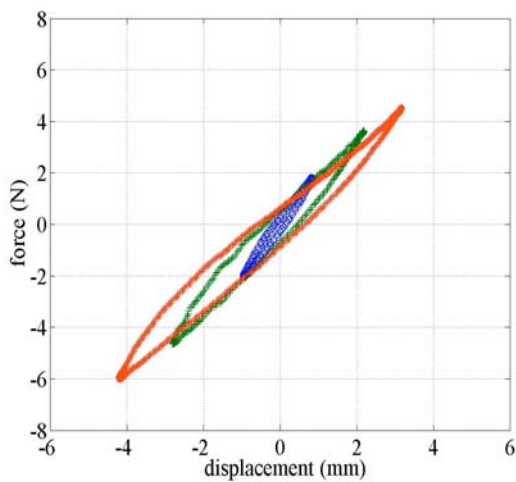
รูป 8 การตอบสนองไซนูซอยด์ลจากแบบจำลองที่ใช้
อนุกรมโวลเทอราอันดับหนึ่ง



รูป 6 ฟังก์ชันถ่ายโอนอันดับสองจากการจำลอง



รูป 9 การตอบสนองไซนูซอยด์ลจากแบบจำลองที่ใช้
อนุกรมโวลเทอราอันดับสาม



รูป 7 การตอบสนองไซนูซอยด์ลจากการทดลอง
ที่ความถี่ 15 Hz