

## ความเค้นในท่อยาวเหนือไฟ Stresses in Long Pipes Above Fire

อภิวัฒน์ พลชัย<sup>1</sup> ปกรณ์ สัทธรรมนวงศ์<sup>2</sup>

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200 โทร. 0-53944146 โทรสาร. 0-53944145 E-mail: A\_Polchai@hotmail.com<sup>1</sup>

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวรวิทยาเขตสารสนเทศพะเยา

อ.เมือง จ.พะเยา 56000 โทร. 0-54484222 โทรสาร. 0-54484224 E-mail: S\_pakorn1975@hotmail.com<sup>2</sup>

Apiwon Polchai<sup>1</sup> Pakorn Satthumnuong<sup>2</sup>

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chiang Mai University,

Chiang Mai, 50200, Thailand Tel: 0-53944146 Fax: 0-53944145 E-mail: A\_Polchai@hotmail.com<sup>1</sup>

Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Naresuan University Phayao Campus,

Phayao, 56000, Thailand Tel: 0-54484222 Fax: 0-54484224 E-mail: S\_pakorn1975@hotmail.com<sup>2</sup>

### บทคัดย่อ

กรณีศึกษาปัญหาท่อยาววางไว้ใกล้ไฟด้านเดียว ซึ่งทำให้อุณหภูมิที่ผิวท่อภายนอกเปลี่ยนแปลงกับแนวเส้นรอบวง โดยใช้หลักการความยืดหยุ่นเชิงความร้อนและสมมุติให้เป็นกรณีความเครียดระนาบทั่วไปบนภาคตัดทอ วัตถุประสงค์เพื่อหาผลเฉลยรูปแบบปิดสำหรับการกระจายความเค้นและการจัดในเนื้อวัตถุทำทอบนภาคตัดทอโดยระเบียบวิธีวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ จากการวิจัยพบว่าถ้ากำหนดให้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวนอกท่อเป็นไปตามที่นำเสนอไว้และใช้วิธีแยกย่อยปัญหาทั้งหมดให้ประกอบมาจากสองปัญหาย่อยคือ ปัญหาย่อยชุดแรกเป็นการหาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิภายในภายนอกแตกต่างกันแต่ไม่แปรเปลี่ยนตามเส้นรอบวง กับปัญหาย่อยชุดที่สองเป็นการหาความเค้นเนื่องจากอุณหภูมิภายในเป็นศูนย์และอุณหภูมิภายนอกแปรเปลี่ยนแบบโคไซน์ของมุมรอบจุดศูนย์กลางภาคตัดทอซึ่งสามารถหาผลเฉลยได้สะดวกและสามารถหาผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ตามหลักการความยืดหยุ่นเชิงความร้อนแบบกรณีความเครียดระนาบได้อย่างสมบูรณ์ ความถูกต้องของผลเฉลยรูปแบบปิดโดยวิธีวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ได้ถูกตรวจสอบโดยการลดภาวะที่กระทำให้เป็นกรณีที่สอดคล้องกับปัญหาแบบฉบับเดิมที่ทราบผลเฉลยแล้ว ผลพบว่าตรงกันทุกประการในทุกกรณี จึงกล่าวได้ว่าผลที่ได้จากการวิจัยนี้สามารถใช้งานได้ จากผลเชิงตัวเลขของวิธีวิเคราะห์พบว่าเนื้อวัตถุของท่อที่อยู่ใกล้ไฟมากที่สุดจะมีปริมาณความเค้นมากกว่าส่วนอื่น ผลต่างของอุณหภูมิภายนอกกับภายในท่อที่สูงเป็นปัจจัยหลักที่ทำให้ปริมาณความเค้นวนมิสเสสสูง ความเครียดแนวแกนจะช่วยลดทั้งปริมาณความเค้นแนวแกนและความเค้นวนมิสเสส ขนาดท่อไม่มีผลกับความเค้นหากอัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกเท่าเดิม ในกรณีที่ขนาดท่อคงที่พบว่าถ้าความหนาท่อเพิ่มขึ้นหรืออัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกที่ลดลงจะมีผลให้ความเค้นวนมิสเสสลดลง

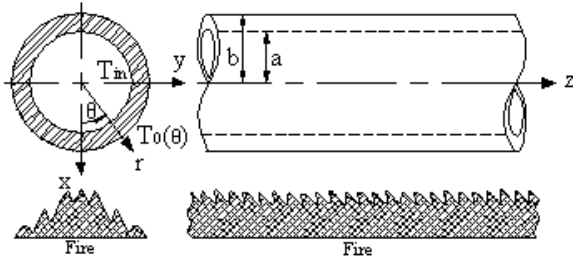
### ABSTRACT

This study concerns long pipes placed above fire that causes circumferential variation in external temperature of pipes. This problem is considered under the thermoelasticity with generalized plane strain assumption. The purpose is to find closed form solutions for stresses distribution and for displacement in pipes material. The analytical mathematics method is employed. From an intensive search, the circumferential variation of the external temperature is presumed so that the stated problem can be splitted into two problems that can be solved mathematically : the first one is to solve for stresses due to the difference of internal and external temperatures without varying in circumferential direction and the second one is to solve for stresses due to zero internal temperature with external temperature varying by cosine of the angle at the center of circular section. Mathematical results based upon thermoelasticity with generalized plane strain condition are completely obtained. The closed form solutions are checked by reducing the load to classical cases with known solutions. They absolutely match case by case. So, the result is claimed realizable. Numerical results from analytical method show that the pipe material closest to the fire bears the highest stresses. The large difference in external and internal temperature causes high Von-Mises stresses. The axial strains reduce both axial and Von-Mises stresses. Pipe sizes have no effect on the stresses if the ratio of internal to external radii does not change. When the pipe size is kept constant, thicker pipe or smaller ratio of internal to external radii causes less Von-Mises stress.

## 1. บทนำ

ส่วนใหญ่การผลิตไอน้ำของหม้อไอน้ำมักพบในโรงไฟฟ้า โรงงานอุตสาหกรรม และโรงพยาบาล โดยภายในหม้อไอน้ำจะประกอบด้วยท่อที่รับความร้อนสูง อุณหภูมิจากความร้อนจะกระทำต่อผนังท่อด้านในและด้านนอก เพื่อที่จะวิเคราะห์ถึงการเสียหายที่เกิดกับผิวและเนื้อวัสดุ โดยเปรียบเทียบกับขีดจำกัดของความเสียหายที่ท่อจะทนได้ ฉะนั้นหากเป็นไปได้ควรศึกษาหาทฤษฎีมาวิเคราะห์ปัญหาลักษณะดังกล่าว เพื่อนำผลของการศึกษาไปประยุกต์ใช้กับงานทางด้านการออกแบบเลือกขนาดและความหนาของท่อเพื่อให้เกิดความมั่นใจความปลอดภัยและความถูกต้องตามหลักเศรษฐศาสตร์วิศวกรรม

แนวทางทางการกระจายความเค้นที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุของท่อยาว [1-4] และการเสียรูปของภาคตัด โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังรูป 1 ของลักษณะท่อ ภาวะที่กระทำ และชนิดของวัสดุที่ใช้ทำท่อ ใช้หลักการความยืดหยุ่นเชิงความร้อน (Thermoelasticity) [5-8] เพื่อหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytical solution) โดยระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์



รูป 1 ท่อยาวรับอุณหภูมิภายในและภายนอกตั้งเหนือไฟด้านเดียว

แบบจำลองท่อตั้งอยู่เหนือไฟที่สม่ำเสมอไปตามแนวยาวท่อ โดยมีรัศมีภายใน  $a$  และรัศมีภายนอก  $b$  กำหนดให้อุณหภูมิภายในท่อกระจายสม่ำเสมอคงที่เป็น  $T_{in}$  อุณหภูมิภายนอกอยู่ใกล้ไฟด้านเดียว โดยเปลี่ยนแปลงกับ  $\theta$  เป็น  $T_0(\theta)$

## 2. ปัญหาเชิงวิศวกรรม

### 2.1 ทฤษฎีความยืดหยุ่นเชิงความร้อน

กำหนดว่าท่อที่ใช้เป็นวัสดุเนื้อเดียวมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง การขจัดเกิดขึ้นน้อยมาก พิจารณาเป็นปัญหาของความยืดหยุ่นเชิงเส้นลักษณะความยืดหยุ่นเชิงสถิตศาสตร์ (Elastostatics) โดยใช้สมการควบคุมพื้นฐานคือ สมการสมดุล (Equilibrium equations) สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ความเครียด และอุณหภูมิ (Duhamel-Neumann law) สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการขจัด (Strain-displacement relations) และสมการการนำความร้อน (Heat conduction) ในการแก้ปัญหาจะพิจารณาปริมาณการขจัดเป็นหลักจึงไม่ใช้สมการความเข้ากันได้ของความเครียด (Strain compatibility equations) [9-10] และเนื่องจากภาวะที่กระทำกำหนดให้ไม่เปลี่ยนแปลงตามแนวยาวของท่อ จึงเลือกพิจารณากรณีของความเครียดระนาบทั่วไป (Generalized plane strain) โดยความร้อนที่ผิวนอกท่อสมมาตรกับแกนเดียวทำให้สามารถลดรูปฟังก์ชันของการขจัดและฟังก์ชันของอุณหภูมิภายในเนื้อวัสดุท่อได้เป็น

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z) &= u_r(r, \theta), & u_\theta(r, \theta, z) &= u_\theta(r, \theta), \\ u_z(r, \theta, z) &= cz, & T(r, \theta, z) &= T(r, \theta) \end{aligned} \quad (1)$$

และความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการขจัดเป็น

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{rz} &= \varepsilon_{\theta z} = 0, & \varepsilon_z &= c \end{aligned} \quad (2)$$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ความเครียดและอุณหภูมิเป็น

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + c)) - \beta T, \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + c)) - \beta T, \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} ((1-\nu)c + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta)) - \beta T, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{E}{1+\nu} (\varepsilon_{r\theta}), \\ \sigma_{rz} &= 0, \\ \sigma_{\theta z} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{โดยที่ } \beta = \frac{E\alpha}{1-2\nu}$$

สมการการนำความร้อน [11-12] เป็น

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

สมมติให้แรงจากระยะไกลที่กระทำกับวัตถุเป็น

ศูนย์ ( $F_r = F_\theta = F_z = 0$ ) สมการสมดุลจะเหลือเพียงสองสมการแรกและลดรูปเป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

### 2.2 เงื่อนไขที่ขอบ

เนื่องจากพิจารณาท่อยาวกรณีของความเครียดระนาบของปัญหาในสองมิติทำให้ไม่ต้องคำนึงถึงเงื่อนไขที่ขอบท่อที่ห่างออกจากปลายทั้งสองข้าง ดังนั้นขอบเขตที่ใช้จึงอยู่ในช่วง  $a \leq r \leq b$

เงื่อนไขของความดันที่ขอบท่อ

$$\begin{aligned} r = a, & \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \\ r = b, & \quad \sigma_r = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

เงื่อนไขของอุณหภูมิที่ขอบท่อ

$$\begin{aligned} r = a, & \quad T(a, \theta) = T_{in} \\ r = b, & \quad T(b, \theta) = T_0(\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

จากสมการควบคุมพื้นฐาน (2), (3), (4) และ (5) และเงื่อนไขที่ขอบ (6) และ (7) จะต้องทำการหาผลเฉลยของการขจัดและความเค้นในเนื้อท่อ โดยอันดับแรกจะต้องหาผลเฉลยของการกระจายอุณหภูมิในสมการ (4) ออกมาก่อน โดยให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ขอบ (7) เพื่อนำไปใช้ในสมการ (3) ที่อยู่ในรูปของการขจัดจากการแทนสมการ (2) ลงไป จากนั้นนำสมการ (3) ใหม่ที่ได้แทนต่อในสมการ (5) จะได้สมการ (5) ใหม่ในรูปแบบสมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นของการขจัด และในส่วนของวิธีการแก้ปัญหาก็เพื่อหาผลเฉลยจะได้อธิบายในหัวข้อต่อไป

### 3. วิธีหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์

หาผลเฉลยการกระจายอุณหภูมิ ผลเฉลยการขจัด และผลเฉลยความเค้น ตามลำดับดังต่อไปนี้

#### 3.1 การกระจายอุณหภูมิมบนภาคตัดต่อ

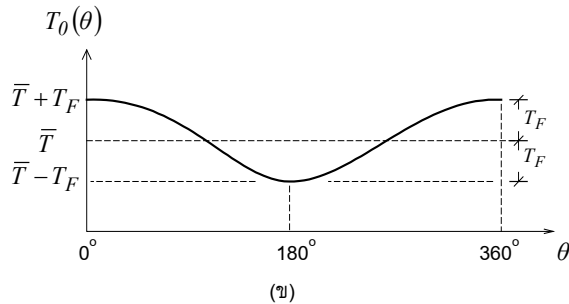
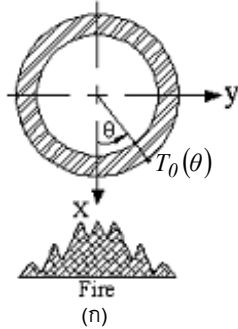
จากลักษณะภาวะของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นนั้น อุณหภูมิผิวท่อภายนอกที่อยู่ใกล้ไฟจะมีอุณหภูมิสูงสุดเมื่อเทียบกับผิวท่อภายนอกด้านตรงกันข้ามที่มีอุณหภูมิต่ำสุด จากลักษณะทางกายภาพของภาวะดังกล่าวทราบว่าอุณหภูมิผิวท่อภายนอกเป็นฟังก์ชันของ  $(\theta)$  ในที่นี้สมมุติให้เป็น

$$T_0(\theta) = \bar{T} + T_F \cos(\theta) \quad \text{โดยที่ } r = b \quad (8)$$

ด้วยเหตุผลนี้จะทำให้สามารถหาผลเฉลยจากคณิตศาสตร์ได้

โดยที่  $\bar{T}$  คืออุณหภูมิเฉลี่ยที่ขอบนอกท่อ

$T_F$  คืออุณหภูมิแอมพลิจูดที่ขอบนอกท่อ ดังแสดงในรูป 2



รูป 2 (ก) แสดงภาวะของอุณหภูมิที่ผิวภายนอกและภายใน  
(ข) ฟังก์ชันอุณหภูมิที่ผิวนอกท่อแปรเปลี่ยนกับ  $\theta$

อุณหภูมิที่กระจายบนภาคตัดต่อ  $T(r, \theta)$  จะพิจารณาในกรณีของการนำความร้อน ซึ่งจะใช้สมการของการนำความร้อน (4) และให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของอุณหภูมิที่ขอบ (7)

การหาผลเฉลยในที่นี้เสนอให้แยกการกระจายอุณหภูมิเป็นสองส่วนคือ

$$T(r, \theta) = T_1(r) + T_2(r, \theta) \quad (9)$$

เมื่อนำสมการ (9) แทนลงในสมการ (4) และนำสมการ (8) แทนลงใน (7) สามารถแยกส่วนของสมการดังกล่าวเป็นดังนี้คือ

ส่วนที่หนึ่งสำหรับ  $T_1(r)$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} = 0 \quad (10)$$

เงื่อนไขที่ขอบ

$$\begin{aligned} r = a, \quad T_1(a) &= T_{in} \\ r = b, \quad T_1(b) &= \bar{T} \end{aligned} \quad (11)$$

และส่วนที่สองสำหรับ  $T_2(r, \theta)$

$$\frac{1}{r} \left( \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (12)$$

เงื่อนไขที่ขอบ

$$\begin{aligned} r = a, \quad T_2(a, \theta) &= 0 \\ r = b, \quad T_2(b, \theta) &= T_F \cos(\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

จากการแก้สมการ (10) และ (12) ให้สอดคล้องกับเงื่อนไข (11) และ (13) ได้ผลการกระจายอุณหภูมิ  $T_1(r)$  และ  $T_2(r, \theta)$  ตามลำดับ ซึ่งจะแสดงผลเฉลยได้ในหัวข้อ 4

#### 3.2 ระเบียบวิธีการแยกตัวแปรของการขจัด

การศึกษานี้เมื่อทราบผลเฉลยของการกระจายอุณหภูมิแล้ว จะหาความเค้นในเนื้อวัตถุโดยเริ่มพิจารณาจากปริมาณของการขจัดซึ่งเสนอการแก้ปัญหาโดยวิธีแยกการขจัด  $u_r(r, \theta)$  และ  $u_\theta(r, \theta)$  แต่จะตัวออกเป็นสองส่วนคือ

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta) &= u_{r(1)}(r) + u_{r(2)}(r, \theta) \\ u_\theta(r, \theta) &= u_{\theta(1)}(r) + u_{\theta(2)}(r, \theta) \end{aligned} \quad (14)$$

นำสมการ (14) แทนลงใน (2) แล้วนำผลแทนลงใน (3) จะได้ความเค้น  $\sigma_r = \sigma_{r(1)}(r) + \sigma_{r(2)}(r, \theta)$ ,  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta(1)}(r) + \sigma_{r\theta(2)}(r, \theta)$  โดย

$$\sigma_{r(1)}(r) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \begin{aligned} &(1-\nu) \frac{\partial u_{r(1)}}{\partial r} \\ &+\nu \left( \frac{u_{r(1)}}{r} + c \right) \end{aligned} \right\} - \beta T_1(r)$$

$$\sigma_{r(2)}(r, \theta) = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \begin{array}{l} (1-\nu) \frac{\partial u_{r(2)}}{\partial r} + \\ \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta(2)}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{u_{r(2)}}{r} + c \right) \end{array} \right\} - \beta T_2(r, \theta)$$

$$\sigma_{r\theta(1)}(r) = 0$$

$$\sigma_{r\theta(2)}(r, \theta) = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r(2)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta(2)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta(2)}}{r} \right\} \quad (14.1)$$

เมื่อนำสมการ (14) นี้แทนลงในสมการควบคุมพื้นฐาน (2), (3), (5) และเงื่อนไขที่ขอบ (6) พบว่าสามารถแยกชุดสมการควบคุมและเงื่อนไขที่ขอบออกเป็นสองชุดเพื่อความสะดวกในการหาผลเฉลยทางคณิตศาสตร์คือ

### 3.2.1 สมการควบคุมชุด (1)

สมการควบคุมชุด (1) นี้สำหรับ  $u_{r(1)}(r)$  และ  $u_{\theta(1)}(r)$  โดยกำหนดให้  $u_{\theta(1)}(r) = 0$  แล้วทำให้สมการควบคุมในทอม  $u_{r(1)}$  เป็นดังนี้

$$A \left( r^2 \frac{\partial^2 u_{r(1)}}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_{r(1)}}{\partial r} - u_{r(1)} \right) = \frac{Ea}{1-2\nu} r^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \quad (15)$$

$$\text{โดยที่ } A \equiv \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

และมีเงื่อนไขที่ขอบเป็นดังนี้

$$\begin{array}{ll} r = a, & \sigma_{r(1)} = 0, \sigma_{r\theta(1)} = 0 \\ r = b, & \sigma_{r(1)} = 0, \sigma_{r\theta(1)} = 0 \end{array} \quad (15.1)$$

ซึ่งผลเฉลยที่หาได้จะแสดงไว้ในหัวข้อ 4.2

### 3.2.2 สมการควบคุมชุด (2)

สมการควบคุมชุด (2) นี้สำหรับ  $u_{r(2)}(r, \theta)$  และ  $u_{\theta(2)}(r, \theta)$  ทำให้สมการควบคุมในทอม  $u_{r(2)}$  และ  $u_{\theta(2)}$  เป็นดังนี้

$$\begin{aligned} & A \left( r^2 \frac{\partial^2 u_{r(2)}}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_{r(2)}}{\partial r} - u_{r(2)} \right) \\ & + B \left( \frac{\partial^2 u_{r(2)}}{\partial \theta^2} \right) + C \left( r \frac{\partial^2 u_{\theta(2)}}{\partial r \partial \theta} \right) \\ & + D \left( \frac{\partial u_{\theta(2)}}{\partial \theta} \right) \\ & = \frac{b(a^2 + r^2) \alpha E}{(a^2 - b^2)(-1 + 2\nu)} T_F \cos(\theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & B \left( r^2 \frac{\partial^2 u_{\theta(2)}}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_{\theta(2)}}{\partial r} - u_{\theta(2)} \right) \\ & + A \left( \frac{\partial^2 u_{\theta(2)}}{\partial \theta^2} \right) + C \left( r \frac{\partial^2 u_{r(2)}}{\partial r \partial \theta} \right) \\ & - D \left( \frac{\partial u_{r(2)}}{\partial \theta} \right) \\ & = \frac{b(a^2 - r^2) \alpha E}{(a^2 - b^2)(-1 + 2\nu)} T_F \sin(\theta) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{โดยที่ } B \equiv \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$C \equiv \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$D \equiv \frac{-E(3-4\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$$

และมีเงื่อนไขที่ขอบเป็นดังนี้

$$\begin{array}{ll} r = a, & \sigma_{r(2)} = 0, \sigma_{r\theta(2)} = 0 \\ r = b, & \sigma_{r(2)} = 0, \sigma_{r\theta(2)} = 0 \end{array} \quad (16.1)$$

วิธีการหาผลเฉลยของการจัดในส่วนนี้ได้ทำการวิจัยออกมาจนพบว่าการจัดในแนวรัศมี  $u_{r(2)}$  และแนวเส้นสัมผัส  $u_{\theta(2)}$  เป็นดังนี้คือ

$$\begin{aligned} u_{r(2)}(r, \theta) &= U(r) \cos \theta, \\ u_{\theta(2)}(r, \theta) &= W(r) \sin \theta \end{aligned} \quad (17)$$

เมื่อแทน (17) ลงในสมการ (16) ได้เป็นสมการใหม่คือ

$$\begin{aligned} & A \left( r^2 \frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial U(r)}{\partial r} - U(r) \right) - BU(r) \\ & + C \left( r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + DW(r) = \frac{E \alpha b (a^2 + r^2) T_F}{(a^2 - b^2)(-1 + 2\nu)} \\ & - AW(r) + B \left( r^2 \frac{\partial^2 W(r)}{\partial r^2} + r \frac{\partial W(r)}{\partial r} - W(r) \right) \\ & - C \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + DU(r) = \frac{E \alpha b (a^2 - r^2) T_F}{(a^2 - b^2)(-1 + 2\nu)} \end{aligned} \quad (18)$$

เปลี่ยนสมการ (18) จาก  $U(r)$  และ  $W(r)$  เป็น  $U(s)$  และ  $W(s)$  ตามลำดับโดยกำหนดให้  $r = e^s$  แทนลงในสมการ (18) เป็นดังนี้

$$A \left( \frac{\partial^2 U(s)}{\partial s^2} - U(s) \right) - BU(s) + C \left( \frac{\partial W}{\partial s} \right) + DW(s) = \frac{Eab(a^2 + e^{2s}) T_F}{(a^2 - b^2)(-1 + 2v)} \quad (19)$$

ทำการแก้สมการ (19) หา  $U(s)$  และ  $W(s)$  นำผลที่ได้เปลี่ยนกลับเป็น  $U(r)$  และ  $W(r)$  แล้วคูณกับ  $\cos(\theta)$  และ  $\sin(\theta)$  ตามสมการ (17) ได้เป็น  $u_{r(2)} = U(r)\cos\theta$  และ  $u_{\theta(2)} = W(r)\sin\theta$

เนื่องจากผลเฉลยเป็นของปัญหาแบบสถิต จึงกำหนดจุดใดจุดหนึ่งบนหน้าตัดต่อให้เป็นจุดอยู่กับที่เพื่อหาตัวคงที่ได้ครบ ในที่นี้เลือกจุด  $r = a, \theta = 180^\circ$  เป็นจุดอยู่กับที่โดยรวมผลทั้งหมดจากผลเฉลยของการขจัดจากชุดสมการ (15) และ (16) จึงกำหนดได้ว่า

$$u_r(r = a, \theta = 180^\circ) = u_{r(1)} + u_{r(2)} = 0 \quad (20)$$

เมื่อทราบผลเฉลยของการขจัดแล้ว ทำการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของความเค้นโดยการแทนกลับลงในสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการขจัด และสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นความเครียด และอุณหภูมิ ซึ่งได้แสดงผลเฉลยไว้ในหัวข้อถัดไป

#### 4. ผลเฉลยของความเค้นเชิงวิเคราะห์โดยระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์

จะแสดงการกระจายอุณหภูมิ การขจัด และความเค้นอยู่ในรูปตัวแปรไร้มิติ  $\eta = \frac{a}{b}$  และ  $\zeta = \frac{r}{b}$  ดังต่อไปนี้

##### 4.1 ผลเฉลยของการกระจายอุณหภูมิภายในเนื้อท่อ

ผลเฉลยของการกระจายอุณหภูมิ  $T(r, \theta)$  ซึ่งควบคุมด้วยสมการ (10), (11), (12) และ (13) คือ

$$T(r, \theta) = T_1(r) + T_2(r, \theta) \\ T(r, \theta) = \bar{T} - \frac{\ln(\zeta)}{\ln(\eta)} (\bar{T} - T_{in}) + \frac{(\eta^2 - \zeta^2)}{(\eta^2 - 1)\zeta} T_F \cos(\theta) \quad (21)$$

ผลเฉลยของการกระจายอุณหภูมินี้นำไปแทนในสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ความเครียด และอุณหภูมิ (3) เพื่อหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ของการขจัดซึ่งจะกล่าวในหัวข้อถัดไป

##### 4.2 ผลเฉลยของการขจัด

ผลเฉลยการขจัดของปัญหาที่รับอุณหภูมิประกอบด้วย การขจัดแนวรัศมีส่วนที่ (1) และการขจัดแนวรัศมีส่วนที่ (2) และการขจัดแนวเส้นสัมผัสส่วนที่ (2) ตามกล่าวในหัวข้อ 3.2.1 และ 3.2.2 คือ

$$u_{r(1)} = q_1(r) \quad (22)$$

โดยที่

$$q_1 = \frac{\alpha(1+v)(\bar{T} - T_{in})}{2(1-v)} \times \left( \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \left( \frac{1}{\zeta^2} - 1 \right) + \frac{1}{\ln(\eta)} (1-v - \ln(\zeta)) \right) + \alpha(1+v) \left( \frac{\bar{T} - T_{in}\eta^2}{1-\eta^2} \right)$$

$$u_{r(2)} = (I_1(r) + I_2(r \ln(r))) \times \cos(\theta) \quad (23)$$

โดยที่

$$I_1 = \frac{\alpha(1+v)T_F}{4(1-v)} \left( \frac{\eta^4}{1-\eta^4} \left( \frac{1}{\zeta^3} - \frac{1+2v}{\zeta} + \frac{2\ln(a)}{\zeta} \right) - \frac{\eta^2}{1-\eta^4} \left( \frac{3-2v-2\ln(a)}{\zeta} - (1+2v)\zeta \right) + \frac{2\zeta(1-v)}{1-\eta^4} \right) - \left( cv - \frac{\alpha(1+v)(\bar{T} - T_{in})}{2\ln(\eta)} \right) \times \left( \frac{\eta}{\zeta} \right) - \left( \frac{\alpha(1+v)(\bar{T} - \eta^2 T_{in})}{1-\eta^2} \right) \times \left( \frac{\eta}{\zeta} \right) \\ I_2 = -\frac{\alpha(1+v)T_F}{2(1-v)} \left( \frac{\eta^2}{(1-\eta^2)\zeta} \right)$$

$$u_{\theta(2)} = (s_1(r) - I_2(r \ln(r))) \times \sin(\theta) \quad (24)$$

โดยที่

$$s_1 = \frac{\alpha(1+v)T_F}{4(1-v)} \left( \frac{\eta^4}{1-\eta^4} \left( \frac{1}{\zeta^3} + \frac{1+2v-2(1+\ln(a))}{\zeta} \right) + \frac{\eta^2}{1-\eta^4} \times \frac{(3-2v)(1-\zeta^2) - 2(1+\ln a)}{\zeta} + \frac{2\zeta(1-v)}{1-\eta^4} \right) - \left( cv - \frac{\alpha(1+v)(\bar{T} - T_{in})}{2\ln(\eta)} \right) \times \left( \frac{\eta}{\zeta} \right) - \left( \frac{\alpha(1+v)(\bar{T} - \eta^2 T_{in})}{1-\eta^2} \right) \times \left( \frac{\eta}{\zeta} \right)$$

ผลของการขจัดทั้งหมดนั้นเมื่อนำมารวมกันจะเป็นผลเฉลยของลักษณะปัญหาที่รับอุณหภูมิภายในคงที่ และอุณหภูมิภายนอกแปรเปลี่ยนกับเส้นรอบวงซึ่งตั้งอยู่บนผิวไฟโดยแยกเป็นการขจัดแนวรัศมีท่อ และการขจัดแนวเส้นสัมผัสท่อ โดยแสดงผลรวมสมการผลเฉลยของปัญหาคือ

$$u_r = u_{r(1)} + u_{r(2)} \quad \text{และ} \quad u_\theta = u_{\theta(2)} \quad (25)$$

เมื่อนำผลของการจัดแทนกลับลงในสมการความสัมพันธ์ระหว่างการจัด ความเครียด และแทนต่อในสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น ความเครียด และอุณหภูมิ จะได้ผลเฉลยของความเค้นดังแสดงผลในหัวข้อต่อไป

#### 4.3 ผลเฉลยของความเค้น

ผลเฉลยความเค้นของลักษณะปัญหาที่รับอุณหภูมิภายใน และภายนอกท่อคือ

$$\sigma_r = \frac{E\alpha(\bar{T} - T_{in})}{2(1-\nu)} \left( \frac{\ln(\xi)}{\ln(\eta)} + \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \left( 1 - \frac{1}{\xi^2} \right) \right) - \frac{E\alpha T_F \cos\theta}{2(1-\nu)} \left( \frac{\frac{\eta^2}{1-\eta^4}(\xi) - \frac{\eta^2}{1-\eta^2}(\xi)^{-1}}{+ \frac{\eta^4}{1-\eta^4}(\xi)^{-3}} \right) \quad (26)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha(\bar{T} - T_{in})}{2(1-\nu)} \left( \frac{\ln(\xi)}{\ln(\eta)} + \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \left( 1 + \frac{1}{\xi^2} \right) + \frac{1}{\ln(\eta)} \right) - \frac{E\alpha T_F \cos\theta}{2(1-\nu)} \left( \frac{\frac{3\eta^2}{1-\eta^4}(\xi) - \frac{\eta^2}{1-\eta^2}(\xi)^{-1}}{- \frac{\eta^4}{1-\eta^4}(\xi)^{-3}} \right) \quad (27)$$

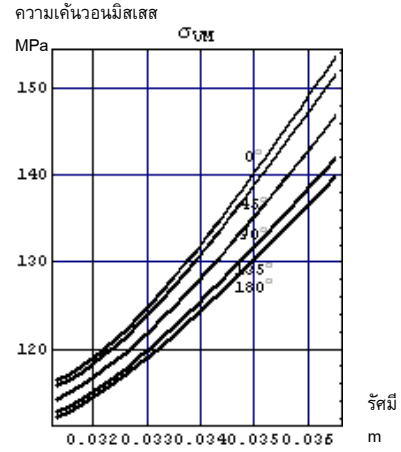
$$\sigma_z = \frac{E\alpha(\bar{T} - T_{in})}{1-\nu} \left( \frac{\ln(\xi)}{\ln(\eta)} + \frac{\nu\eta^2}{1-\eta^2} + \frac{\nu}{2\ln(\eta)} \right) - E(\alpha\bar{T} - c) - \frac{E\alpha T_F \cos\theta}{1-\nu} \left( \frac{\frac{\eta^2(1+\nu)}{1-\eta^4}(\xi) - \frac{\eta^2}{1-\eta^2}(\xi)^{-1}}{+ \frac{\xi^4(1-\nu)}{1-\eta^4}(\xi)^{-3}} \right) \quad (28)$$

$$\sigma_{r\theta} = - \frac{E\alpha T_F \sin\theta}{2(1-\nu)} \left( \frac{\frac{\eta^2}{1-\eta^4}(\xi) - \frac{\eta^2}{1-\eta^2}(\xi)^{-1}}{+ \frac{\eta^4}{1-\eta^4}(\xi)^{-3}} \right) \quad (29)$$

$$\sigma_{V.M.} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_r\sigma_\theta - \sigma_r\sigma_z - \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_z^2 + 3\sigma_{r\theta}^2} \quad (30)$$

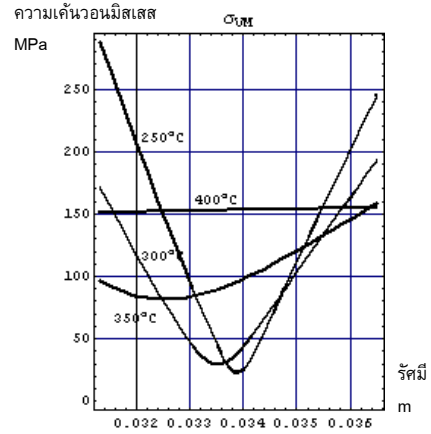
#### 4.4 ผลเฉลยของความเค้นเชิงตัวเลข

-เมื่อวัตถุของท่อที่อยู่ใกล้ไฟมากที่สุด  $r = b$ ,  $\theta = 0^\circ$  จะมีปริมาณความเค้นมากกว่าส่วนอื่น



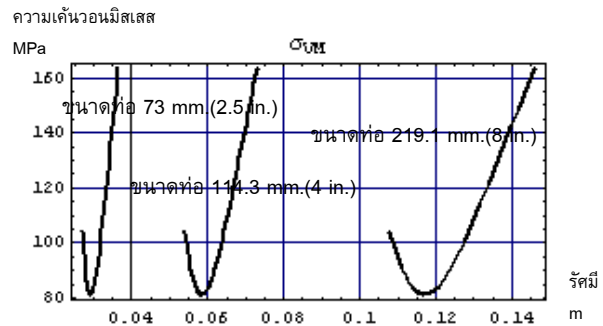
รูป 3 ความเค้นวอนนิสเสสของขนาดท่อ 73 mm.(2.5in.) Sch40,  $c = 0.004$  m/m,  $T_{in} = 350^\circ\text{C}$ ,  $\bar{T} = 400^\circ\text{C}$  และ  $T_F = 3^\circ\text{C}$  ที่มุมบนภาคตัด 0, 45, 90, 135 และ 180 องศา

-ผลต่างของอุณหภูมิภายในกับภายนอกท่อที่สูงเป็นปัจจัยหลักที่ทำให้ปริมาณความเค้นวอนนิสเสสสูง

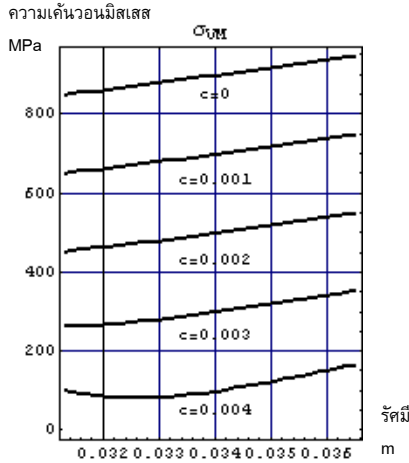


รูป 4 ความเค้นวอนนิสเสสของขนาดท่อ 73 mm.(2.5 in.) Sch 40,  $c = 0.004$  m/m,  $\bar{T} = 400^\circ\text{C}$ ,  $\theta = 45^\circ$  และ  $T_F = 3^\circ\text{C}$  ที่  $T_{in} = 250, 300, 350$  และ  $400^\circ\text{C}$

-ขนาดท่อไม่มีผลกับความเค้นหากอัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกเท่าเดิม

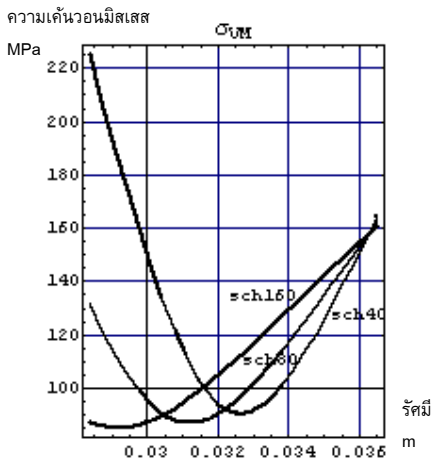


รูป 5 ความเค้นวอนนิสเสสของขนาดท่อ 73 mm.(2.5 in.), 114.3 mm. (4 in.) และ 219.1 mm. (8 in.),  $\theta = 45^\circ$ ,  $c = 0.004$  m/m,  $T_{in} = 350^\circ\text{C}$ ,  $\bar{T} = 400^\circ\text{C}$ ,  $T_F = 3^\circ\text{C}$  ที่ Sch 40



รูป 6 ความเค้นวอนมิสเสสของขนาดท่อ 73 mm.(2.5 in.) Sch 40,  $T_{in} = 350\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $\bar{T} = 400\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $\theta = 45^{\circ}$  และ  $T_F = 3\text{ }^{\circ}\text{C}$  ที่  $c = 0, 0.001, 0.002, 0.003$  และ  $0.004$

-ขนาดท่อคงที่พบว่าถ้าความหนาท่อเพิ่มขึ้นหรืออัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกที่ลดลงมีผลให้ความเค้นวอนมิสเสสลดลง



รูป 7 ความเค้นวอนมิสเสสของขนาดท่อ 73 mm.(2.5 in.),  $\theta = 45^{\circ}$ ,  $c = 0.004$  m/m,  $T_{in} = 350\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $\bar{T} = 400\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $T_F = 3\text{ }^{\circ}\text{C}$  ที่ Sch 40, Sch 80 และ Sch 160

## 5. สรุปผล

จากการศึกษาปัญหาท่อยาววางไว้ใกล้ไฟ ซึ่งทำให้อุณหภูมิที่ผิวท่อภายนอกไม่สม่ำเสมอเปลี่ยนแปลงกับแนวเส้นรอบวงของภาคตัด เพื่อทำการหาผลเฉลยทางคณิตศาสตร์ของการจัดและความเค้นที่เกิดขึ้นภายในเนื้อท่อ โดยใช้วิธีการแยกย่อยสมการควบคุมพื้นฐานและเงื่อนไขที่ขอบของปัญหาทั้งหมดจากระเบียบวิธีวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ตามหลักการความยืดหยุ่นเชิงความร้อนแบบกรณีความเครียดระนาบทั่วไป ให้ประกอบด้วยปัญหาแบบอุณหภูมิภายในและภายนอกท่อคงที่หรือไม่ขึ้นอยู่กับมุมบนภาคตัดท่อ และปัญหาแบบไม่พิจารณาอุณหภูมิภายในท่อ ส่วนอุณหภูมิภายนอกเปลี่ยนแปลงกับมุมบนภาคตัดท่อ

จากผลการวิจัยพบว่าถ้ากำหนดให้การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิที่ผิวนอกท่อเป็นไปตามที่นำเสนอไว้ และใช้วิธีแยกย่อยปัญหาทั้งหมดให้ประกอบมาจากปัญหาย่อยที่สามารถหาผลเฉลยได้สะดวกขึ้น จะสามารถหาผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ตามหลักการความยืดหยุ่นเชิงความร้อนแบบกรณีความเครียดระนาบได้อย่างสมบูรณ์ จากการวิจัยนี้พบว่าที่สามารถหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ได้ก็เพราะมีแนวคิดอีกอย่างหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับอุณหภูมิที่ผิวนอกท่อซึ่งถูกสมมุติให้การแปรปรวนจากด้านอุณหภูมิสูงไปทางด้านอุณหภูมิต่ำที่เป็นไปตามสมการ (8) โดยผลเฉลยรูปแบบปิดที่ได้ในที่นี้ประกอบด้วยการจัดแนวรัศมีแสดงในสมการ (22) และ (23) และการจัดแนวเส้นสัมผัสแสดงในสมการ (24) ส่วนการกระจายความเค้นแนวรัศมี ความเค้นแนวเส้นสัมผัส ความเค้นแนวแกน ความเค้นเฉือน และความเค้นวอนมิสเสสแสดงในสมการ (26) ถึง (30) หากลดภาวะที่กระทำให้เป็นกรณีที่สุดดล้องกับปัญหาแบบฉบับเดิมที่ทราบผลเฉลยแล้วพบว่าตรงกันทุกประการ จึงกล่าวได้ว่าผลที่ได้จากการวิจัยนี้สามารถใช้การได้ทำให้มีความมั่นใจในผลเฉลยว่าถูกต้อง

จากผลเชิงตัวเลขของการศึกษานี้พบว่า เนื้อวัตถุของท่อที่อยู่ใกล้ไฟมากที่สุดจะมีปริมาณความเค้นมากกว่าส่วนอื่น ผลต่างของอุณหภูมิภายในกับภายนอกท่อที่สูงเป็นปัจจัยหลักที่ทำให้ปริมาณความเค้นวอนมิสเสสสูง ความเครียดแนวแกนจะช่วยลดทั้งปริมาณความเค้นแนวแกนและความเค้นวอนมิสเสส ขนาดท่อไม่มีผลกับความเค้นหากอัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกเท่าเดิม ในกรณีนี้ที่ขนาดท่อคงที่พบว่าถ้าความหนาท่อเพิ่มขึ้นหรืออัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกที่ลดลงมีผลให้ความเค้นวอนมิสเสสลดลง

## 6. อักษรย่อและสัญลักษณ์

$r, \theta, z$	พิกัดทรงกระบอกในแนวรัศมี
	แนวเส้นสัมผัสและแนวยาว
$a$	รัศมีภายในของท่อ
$b$	รัศมีภายนอกของท่อ
$T_{in}$	อุณหภูมิที่ผิวท่อภายใน
$T_0$	อุณหภูมิที่ผิวท่อภายนอก
$\bar{T}$	อุณหภูมิเฉลี่ยของผิวท่อภายนอก
$T_F$	อุณหภูมิแอมพลิจูดของผิวท่อภายนอก
$T$	อุณหภูมิที่กระจายของท่อเทียบอุณหภูมิอ้างอิง
$u_r$	การจัดในแนวรัศมีของท่อ
$u_\theta$	การจัดในแนวเส้นสัมผัสของท่อ
$u_z$	การจัดตามแนวยาวของท่อ
$\sigma_{ij}$	ความเค้น
$\sigma_{VM}$	ความเค้นวอนมิสเสส
$\varepsilon_{ij}$	ความเครียด
$F_r, F_\theta, F_z$	แรงจากระยะใกล้ที่กระทำกับวัตถุตามแนวรัศมี ตามแนวเส้นสัมผัส และตามแนวยาว ตามลำดับ
$\rho$	ความหนาแน่น
$E$	มอดูลัสของยัง
$\nu$	อัตราส่วนปัวซอง
$c$	ความเครียดตามแนวยาว

$\alpha$       สัมประสิทธิ์การขยายตัวทางความร้อนเชิงเส้น  
 $\beta$       มอดุลัสความร้อน

#### เอกสารอ้างอิง

- [1] Fett, T. 1986. "Temperature Distributions and Thermal Stresses in Asymmetrically Heat Radiated Tubes." *Journal of Applied Mechanics.*, 53: 116-120.
- [2] Hata, T. 1991. "Thermal Shock in a Hollow Sphere Caused by Rapid Uniform Heating." *Journal of Applied Mechanics.*, 58: 64-69.
- [3] Kardomateas, G.A. 1989. "Transient Thermal Stresses in Cylindrically Orthotropic Composite Tubes." *Journal of Applied Mechanics.*, 56: 411-417.
- [4] Sharp, S. and Crouch, S.L. 1986. "Boundary Integral Methods for Thermoelasticity Problems." *Journal of Applied Mechanics.*, 53: 298-302.
- [5] Fung, Y.C. 1965. *Foundations of Solid Mechanics*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- [6] Malvern, L.E. 1969. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- [7] Sokolnikoff, I.S. 1956. *Mathematical Theory of Elasticity*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [8] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. 1970. *Theory of Elasticity*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [9] Hughes, W.F. and Gaylord, E.W. 1963. *Advanced Mechanics of Materials*. Hong Kong: Longman Group Limited.
- [10] Hughes, W.F. and Gaylord, E.W. 1964. *Basic Equation of Engineering Science*. New York: McGraw-Hill Book Company.
- [11] Mase, G.E. and Mase, G.T. 1992. *Continuum Mechanics for Engineers*. Boca Raton, Florida: CRC Press, Inc.
- [12] Polchai, A. 2002. "A Modern Aspect of the Uncoupled Linear Thermo-Elasticity." *Engineering Journal Chiang Mai University.*, 10: 54-60.