

ความเค้นในท่อเนื่องจากความดันภายในอัดค้ำ Stresses in Pipes due to Actual Step Internal Pressure

อภิวัฒน์ พลชัย¹ ปาริชา รัตนศิริ²

¹ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเชียงใหม่ อ.เมือง จ.เชียงใหม่ 50200

โทร 0-53944146 ต่อ 946 Email: apiwon@dome.eng.cmu.ac.th

²ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยบูรพา อ.เมือง จ.ชลบุรี 20131

โทร 0-38745900 ต่อ 3385 Email: pareecha@buu.ac.th

Apiwon Polchai* Pareecha Rattanasiri**

*Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Chiang Mai University, Chiang Mai, 50200, Thailand

Tel: 0-53944146 Ext. 946 Email: apiwon@dome.eng.cmu.ac.th

**Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Burapha University, Chonburi, 20131, Thailand

Tel: 0-38745900 Ext. 3385 Email: pareecha@buu.ac.th

บทคัดย่อ

เอกสารนี้เกี่ยวกับปัญหาที่รับความดันภายในอัดค้ำเมื่อท่ออยู่ในสภาพนิ่งที่เวลาเริ่มต้น การแก้ปัญหาที่ใช้หลักการความยืดหยุ่นเชิงพลศาสตร์และพิจารณาเป็นปัญหาความเครียดระนาบทั่วไปบนภาคตัดทอซึ่งทำให้ได้สมการควบคุมเริ่มต้นเป็นสมการพลวัตที่เงื่อนไขที่ขอบขึ้นกับเวลา แก๊สมการดังกล่าวโดยนาระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์แบบวิเคราะห์มาใช้ซึ่งจะทำให้หาผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ของความเค้นที่แปรผันกับเวลาได้อย่างสมบูรณ์และนำไปใช้ได้ ผลเชิงตัวเลขของความเค้นแสดงว่าขนาดท่อมีผลต่อการเกิดความเค้นน้อยมากถ้าอัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกของท่อคงที่ อัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกของท่อเพิ่มขึ้นส่งผลให้ความเค้นที่เกิดขึ้นถ้าขนาดของท่อคงที่ ในกรณีที่ความเครียดในแนวแกนสูงมากจะทำให้ความเค้นในแนวแกนสูงมากด้วย ผลของพฤติกรรมเชิงพลศาสตร์ของความดันอัดค้ำคือถ้าช่วงเวลาที่ความดันเพิ่มจากศูนย์ถึงสูงสุดน้อยลงทำให้แอมพลิจูดของความเค้นสูงขึ้น ถ้าช่วงเวลาดังกล่าวน้อยมากความเค้นสูงสุดจะสูงกว่าความเค้นเฉลี่ยมาก แต่ถ้าช่วงเวลาดังกล่าวมากความเค้นสูงสุดจะสูงกว่าความเค้นเฉลี่ยน้อยจนสามารถใช้สมการหาความเค้นแบบสถิตศาสตร์ได้

Abstract

This paper deals with the problem of pipes subjected to actual step internal pressure. The pipes are initially at rest. Elastodynamics with generalized plane strain on the pipe section is employed for this problem, so governing equation with time-dependent boundary conditions is obtained. This equation is

solved by the analytical mathematics method, which gives complete mathematical solutions for time-varying stresses. So, the results from this study are claimed usable. Numerical results of stresses show that the pipe size has very little effect on stresses if the internal to external radius ratio does not change. Increasing of internal to external radius ratio results in stress will increase if the pipe size is kept constant. In case of large axial strain, the axial stress is also large. For the dynamic actions of the pressure it is found that, when the rising time is short, the stress amplitude is large. If the rising time is very short, the peak stresses are much higher than the average stresses. When the rising time is very long, the stress amplitude is so small that the mean stress can be calculated by using Elastostatics as well.

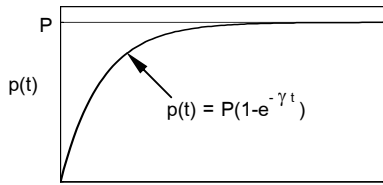
1. บทนำ

ท่อในอุตสาหกรรมการผลิตทำหน้าที่ส่งของไหลจากแหล่งจ่ายไปยังอุปกรณ์อื่น โดยความดันที่เกิดภายในท่อไม่ใช่ความดันสถิต (Static pressure) แต่มีลักษณะกระทำกับผิวในของท่อตามลักษณะการทำงานของแหล่งจ่ายความดันเช่น เมื่อเริ่มต้นเดินเครื่องอัด (Compressor) ความดันในท่อจะเพิ่มขึ้นอย่างช้าๆ จนเวลาผ่านไประยะหนึ่งก็จะเข้าสู่สภาวะเสถียร (Steady state) ที่อาจมีลักษณะความดันสลับไปมา (Fluctuating pressure) กระทำภายในท่อ หรือขณะที่ปิดวาล์วในระบบท่ออย่างกะทันหันจะทำให้เกิดความดันกระแทก (Shock pressure) ภายในท่อได้ เนื่องจากความดันที่ยกตัวอย่างมีลักษณะแปรผันกับเวลา จึงทำให้เกิดความเค้นที่แปรผันกับเวลาในท่อด้วย จากการค้นคว้า

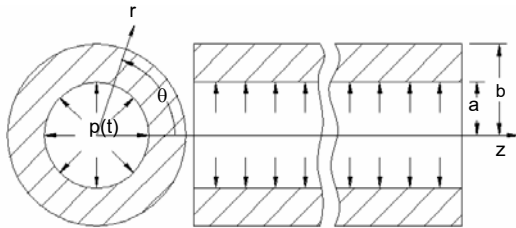
พบว่ามีการศึกษาปัญหาที่รับความดันภายในอย่างกว้างขวาง โดยมากจะเป็นที่รับความดันสถิต [1][2] ความดันวัฏจักร [3][4][5] และความดันกระแทก [6] แต่ยังไม่เคยมีการศึกษาปัญหาที่รับความดันอัดค้ำดังรูป 1 เพื่อหาผลเฉลยของความเค้นที่สมบูรณ์อย่างเป็นทางการมาก่อน จึงเป็นสาเหตุให้ทำการศึกษาค้นคว้าความเค้นในท่อยาวเนื่องจากความดันภายในอัดค้ำ ซึ่งมีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ดังนี้คือ

$$p(t) = P(1 - e^{-\gamma t}), \quad t \geq 0$$

โดย P คือความดันสถิต และ γ คือตัวคงที่ที่เพิ่มบวก มีมิติผกผันกับเวลา การหาความเค้นในท่อจะเริ่มจากสร้างแบบจำลองของท่อยาวรับความดันอัดค้ำจะได้ดังรูป 2 โดยกำหนดให้ u, v และ w คือการขจัดในแนวพิททงกระบอก r, θ และ z ตามลำดับ ใช้หลักการทางความยืดหยุ่นเชิงพลศาสตร์ (Elastodynamics) ซึ่งเกี่ยวข้องกับเวลามาตั้งสมการควบคุมเริ่มต้น และใช้ระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์แบบวิเคราะห์มาแก้สมการดังกล่าวเพื่อหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ (Analytical solution) ของความเค้น



รูป 1 แบบจำลองของความดันอัดค้ำ



รูป 2 แบบจำลองของท่อยาวรับความดันอัดค้ำ

2. ปัญหาเชิงวิศวกรรม

2.1 เงื่อนไขที่ขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นของปัญหา

เมื่อพิจารณาจากลักษณะการสมมาตรรอบแกนกลางของท่อ ความดันภายในกระทำไม่เปลี่ยนแปลงตามตัวแปรในแนวยาวของท่อและให้ท่อยาวมากจึงพิจารณาเป็นกรณีความเครียดระนาบทั่วไป (Generalized plane strain) บนภาคตัดได้ การแก้ปัญหาจึงทำในระนาบ r θ ซึ่งไม่ต้องคำนึงถึงเงื่อนไขที่ขอบปลายทั้งสองข้างของท่อ ดังนั้นขอบเขตที่ใช้จึงอยู่ในช่วง $a \leq r \leq b$ คือ

$$\begin{aligned} \text{ที่ } r = a, \quad \sigma_{rr} &= -p(t), \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \\ \text{ที่ } r = b, \quad \sigma_{rr} &= 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

และเมื่อกำหนดให้ท่ออยู่ในสภาพนิ่งที่เวลาเริ่มต้น จุดทุกจุดในเนื้อวัตถุอยู่กับที่ ดังนั้นจึงได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$\text{ที่ } t = 0, \quad u(r, 0) = 0, \quad \dot{u}(r, 0) = 0 \quad (2)$$

ทุกค่าของ (r, θ , z) ที่อยู่ในขอบเขตของท่อ ในที่นี้ \dot{u} หมายถึง $\frac{\partial u}{\partial t}$

2.2 สมการควบคุมเริ่มต้น

เมื่อพิจารณาจากลักษณะการสมมาตรรอบแกนกลางของท่อของการขจัดที่เกิดขึ้นและวัตถุของท่อเป็นวัตถุเอกพันธ์ที่มีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทางจึงพิจารณาให้ท่อเกิดการเคลื่อนตัวในแนวรัศมีเท่านั้น และเนื่องจากพิจารณาเป็นกรณีของความเครียดระนาบทั่วไป ดังนั้นจากทางกายภาพและทางทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์จึงตั้งสมมุติฐานการขจัดภายในเนื้อวัตถุของท่อได้ว่า

$$u = u(r, t), \quad v = 0, \quad w = kz \quad (3)$$

นอกจากนี้เมื่อให้ความเค้นอยู่ในช่วงความยืดหยุ่นเชิงเส้นและความดันภายในแปรผันกับเวลาจึงใช้หลักการทางความยืดหยุ่นเชิงพลศาสตร์ได้ โดยมีสมการพื้นฐานสี่ชุดสมการ คือ สมการการเคลื่อนที่ (Equations of motion) สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด (Stress-strain relations) สมการความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการขจัด (Strain-displacement relations) และจากสมมุติฐานการขจัดสมการ (3) จึงไม่ใช้สมการความเข้ากันได้ของความเครียด (Strain compatibility equations) และทำให้ความสัมพันธ์ระหว่างความเครียดและการขจัดกลายเป็น

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = k \\ \text{และ } \epsilon_{r\theta} &= \epsilon_{rz} = \epsilon_{\theta z} = 0 \end{aligned}$$

ซึ่งเมื่อนำไปแทนในสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{\Lambda} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{u}{r} + k \right) \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\Lambda} \left[(1-\nu) \frac{u}{r} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + k \right) \right], \\ \sigma_{zz} &= \frac{1}{\Lambda} \left[(1-\nu)k + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right], \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

โดย E คือโมดูลัสของยัง

$$\nu \text{ คืออัตราส่วนปัวซอง และ } \Lambda \equiv \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}$$

เมื่อพิจารณาเทอมด้านขวาของสมการ (4) จะสามารถสรุปได้ว่า $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r, t)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r, t)$ และ $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}(r, t)$ ดังนั้นเมื่อสมมุติให้แรงเนื่องจากวัตถุ (Body forces) เป็นศูนย์ สมการการเคลื่อนที่จะถูกลดรูปและเหลือเพียง

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5)$$

$$\text{เมื่อให้ } c^2 \equiv \frac{1}{\rho \Lambda}, \quad h \equiv \frac{-\nu k}{(1-\nu)} \quad \text{และ } g(t) \equiv h - \Lambda P(1 - e^{-\gamma t})$$

แล้วจากนั้นนำสมการ (4) แทนในสมการ (5) จะได้สมการควบคุมของปัญหาในรูปการขจัด ดังนี้คือ

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} - \frac{u(r, t)}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial t^2} \quad (6)$$

และเมื่อนำสมการแรกของสมการ (4) แทนลงในเงื่อนไขที่ขอบสมการ (1) สมการเงื่อนไขที่ขอบจะเปลี่ยนรูปและเหลือดังนี่คือ

$$\begin{aligned} \text{ที่ } r = a, \quad \frac{\partial u(a, t)}{\partial r} + \frac{\nu}{a(1-\nu)} u(a, t) &= g(t), \\ \text{ที่ } r = b, \quad \frac{\partial u(b, t)}{\partial r} + \frac{\nu}{b(1-\nu)} u(b, t) &= h \end{aligned} \quad (7)$$

เพื่อความรัดกุมในการหาผลเฉลยจึงกำหนดตัวแปรไร้มิติคือ $\delta \equiv \frac{a}{b}, \quad \tilde{r} \equiv \frac{r}{b}, \quad \tilde{u} \equiv \frac{u}{b}$ และ $\tilde{c} \equiv \frac{c}{b}$ ซึ่งทำให้ขอบเขตของปัญหาที่พิจารณาอยู่ในช่วง $\delta \leq \tilde{r} \leq 1$ และเมื่อกำหนดให้

$$\beta \equiv \frac{\nu}{\delta(1-\nu)} \quad \text{และ } \alpha \equiv \beta \delta \quad \text{จะทำให้ชุดสมการ (6), (7) และ (2)}$$

กลายเป็น

สมการควบคุม

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\tilde{r}, t)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{u}(\tilde{r}, t)}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}(\tilde{r}, t)}{\tilde{r}^2} = \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(\tilde{r}, t)}{\partial t^2},$$

$$\text{เงื่อนไขที่ขอบ ที่ } \tilde{r} = \delta, \quad \frac{\partial \tilde{u}(\delta, t)}{\partial \tilde{r}} + \beta \tilde{u}(\delta, t) = g(t),$$

$$\text{ที่ } \tilde{r} = 1, \quad \frac{\partial \tilde{u}(1, t)}{\partial \tilde{r}} + \alpha \tilde{u}(1, t) = h,$$

$$\text{เงื่อนไขเริ่มต้น ที่ } t = 0, \quad \tilde{u}(\tilde{r}, 0) = 0, \quad \dot{\tilde{u}}(\tilde{r}, 0) = 0 \quad (8)$$

ชุดสมการ (8) เรียกว่าปัญหาค่าที่ขอบและค่าเริ่มต้น (Initial-boundary value problem: IBVP) ซึ่งมีตัวแปรตามคือ $\tilde{u}(\tilde{r}, t)$ มีสมการควบคุมเป็นสมการพลวัต (Dynamic equation) ที่มีสัมประสิทธิ์ขึ้นกับตัวแปร \tilde{r} มีเงื่อนไขที่ขอบชนิดไมไฮโมจีเนียสและสัมพันธ์กับความดันในรูปของฟังก์ชัน $g(t)$ จึงทำให้การหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์ทำได้ยาก จากการค้นคว้าพบว่าปัญหาลักษณะนี้ยังไม่มีรูปแบบการหาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์อย่างเป็นทางการมาก่อน จึงเสนอระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์แบบวิเคราะห์มาใช้หาผลเฉลยเชิงวิเคราะห์สำหรับปัญหานี้

3. วิธีหาผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์โดยระเบียบวิธีทางคณิตศาสตร์แบบวิเคราะห์

3.1 กำหนดผลเฉลย $\tilde{u}(\tilde{r}, t)$

เมื่อพิจารณาจากสมการควบคุมเริ่มต้น (8) จึงเสนอการแก้ปัญหาโดยแยก $\tilde{u}(\tilde{r}, t)$ เป็นสองส่วนคือ

$$\tilde{u}(\tilde{r}, t) = \kappa(\tilde{r}, t) + \eta(\tilde{r}, t)$$

และเมื่อนำผลเฉลยของ $\tilde{u}(\tilde{r}, t)$ แทนในชุดสมการ (8) จะทำให้สมการควบคุมและเงื่อนไขที่ขอบถูกแยกเป็นสองชุด แนวคิดที่สำคัญคือชุดสมการ $\kappa(\tilde{r}, t)$ จะถูกเลือกจากการวิเคราะห์ (Inspection) เพื่อให้ชุดสมการ $\eta(\tilde{r}, t)$ มีเงื่อนไขที่ขอบชนิดไฮโมจีเนียสและสามารถใช้ระเบียบวิธีแยกตัวแปร (Separation of variable method) สำหรับแก้ปัญหาได้ ดังนั้นเพื่อให้สอดคล้องกับแนวคิดข้างต้นจึงเลือกผลเฉลยของ $\kappa(\tilde{r}, t)$ ได้ดังนี่คือ

$$\kappa(\tilde{r}, t) = \phi(\tilde{r})h + \psi(\tilde{r})g(t)$$

ซึ่งการเลือกนี้ทำให้ได้ชุดสมการ $\eta(\tilde{r}, t)$ เป็นดังนี่คือ

สมการควบคุม $\eta(\tilde{r}, t)$

$$\frac{\partial^2 \eta(\tilde{r}, t)}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \eta(\tilde{r}, t)}{\partial \tilde{r}} - \frac{\eta(\tilde{r}, t)}{\tilde{r}^2} - \frac{1}{\tilde{c}^2} \frac{\partial^2 \eta(\tilde{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{\psi(\tilde{r})\dot{g}(t)}{\tilde{c}^2},$$

$$\text{เงื่อนไขที่ขอบ ที่ } \tilde{r} = \delta, \quad \frac{\partial \eta(\delta, t)}{\partial \tilde{r}} + \beta \eta(\delta, t) = 0,$$

$$\text{ที่ } \tilde{r} = 1, \quad \frac{\partial \eta(1, t)}{\partial \tilde{r}} + \alpha \eta(1, t) = 0 \quad (9)$$

มีเงื่อนไขเริ่มต้นดังสมการ (8)

สำหรับ $\phi(\tilde{r})$ และ $\psi(\tilde{r})$ อยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยเชิงเส้นชนิดไฮโมจีเนียสมีเงื่อนไขที่ขอบเป็นค่าคงที่ จึงหาผลเฉลยได้ดังนี่คือ

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{r}) &= \frac{1}{(-1+\delta^2)} \left[\frac{-\tilde{r}}{(1+\alpha)} + \frac{\delta^2}{(-1+\alpha)\tilde{r}} \right] \\ \psi(\tilde{r}) &= \frac{\delta^2}{(-1+\delta^2)} \left[\frac{\tilde{r}}{(1+\alpha)} - \frac{1}{(-1+\alpha)\tilde{r}} \right] \end{aligned}$$

3.2 ระเบียบวิธีแยกตัวแปรสำหรับ $\eta(\tilde{r}, t)$

วิธีการแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีแยกตัวแปรทำได้โดยกำหนดให้

$$\eta(\tilde{r}, t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\tilde{r}) T_n(t)$$

และเมื่อแทนลงในสมการ (9) และจะทำให้แยกสมการเป็นสองส่วนดังนี่คือ

สมการควบคุม $R_n(\tilde{r})$

$$\tilde{r}^2 \frac{d^2 R_n(\tilde{r})}{d\tilde{r}^2} + \tilde{r} \frac{dR_n(\tilde{r})}{d\tilde{r}} + (\lambda_n^2 \tilde{r}^2 - 1)R_n(\tilde{r}) = 0,$$

เงื่อนไขที่ขอบ ที่ $\tilde{r} = \delta$, $\frac{dR_n(\delta)}{d\tilde{r}} + \beta R_n(\delta) = 0$,

ที่ $\tilde{r} = 1$, $\frac{dR_n(1)}{d\tilde{r}} + \alpha R_n(1) = 0$

สมการควบคุม $T_n(t)$

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = -B_n \ddot{g}(t),$$

เงื่อนไขเริ่มต้น ที่ $t = 0$, $T_n(0) = -A_n h + B_n \alpha k$,

$$\dot{T}_n(0) = B_n \gamma \Delta P \quad (10)$$

เมื่อ $A_n \equiv \int_{\tilde{r}=\delta}^{\tilde{r}=1} \tilde{r} R_n(\tilde{r}) \phi(\tilde{r}) d\tilde{r}$ และ $B_n \equiv \int_{\tilde{r}=\delta}^{\tilde{r}=1} \tilde{r} R_n(\tilde{r}) \psi(\tilde{r}) d\tilde{r}$

สำหรับ ω_n คือความถี่ธรรมชาติของท่อ $\omega_n = \frac{c}{b} \lambda_n$ (11)

เห็นได้ว่าสมการควบคุม $T_n(t)$ เป็นสมการการสั่นแบบบังคับ (Forced vibration) ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น เป็นดังสมการ (14) จึงหาผลเฉลยได้ว่า

$$T_n(t) = \Lambda \left\{ -\frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega_n^2} B_n P e^{-\gamma t} + \frac{\gamma \omega_n}{\gamma^2 + \omega_n^2} B_n P \sin(\omega_n t) + \left(\frac{\alpha}{\Lambda} k(A_n + B_n) + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \omega_n^2} B_n P \right) \cos(\omega_n t) \right\} \quad (12)$$

เนื่องจากสมการควบคุม $R_n(\tilde{r})$ มีรูปแบบเป็นสมการเบสเซลอันดับ 1 ที่มีเงื่อนไขที่ขอบชนิดไฮโดมิจีเนียส จึงหาผลเฉลยได้ดังนี้คือ

$$R_n(\tilde{r}) = M_n (q_n J_1(\lambda_n \tilde{r}) + Y_1(\lambda_n \tilde{r})) \quad (13)$$

โดย $q_n \equiv -\frac{\lambda_n Y_0(\lambda_n) + (\alpha - 1) Y_1(\lambda_n)}{\lambda_n J_0(\lambda_n) + (\alpha - 1) J_1(\lambda_n)}$ (14)

$$M_n = \frac{1}{\sqrt{\int_{\tilde{r}=\delta}^{\tilde{r}=1} (\tilde{r} [q_n J_1(\lambda_n \tilde{r}) + Y_1(\lambda_n \tilde{r})]^2) d\tilde{r}}} \quad (15)$$

การหา M_n ได้จากการนำสมการ (15) แทนในคุณสมบัติของฟังก์ชัน $R_n(\tilde{r})$ เมื่อเซตของ $R_n(\tilde{r})$ ถูกกำหนดให้เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก (Orthogonal function) ในช่วง $(\delta, 1)$

$$\int_{\tilde{r}=\delta}^{\tilde{r}=1} \tilde{r} R_n(\tilde{r}) R_m(\tilde{r}) d\tilde{r} \equiv \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases}$$

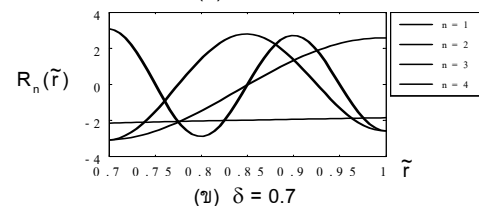
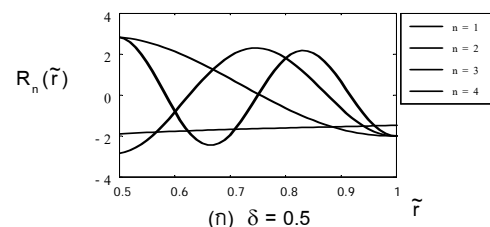
ในทางคณิตศาสตร์ $R_n(\tilde{r})$ ถูกเรียกว่าฟังก์ชันเฉพาะ (Eigenfunction) หรือในทางวิศวกรรมคือลักษณะการสั่น (Mode shape) ของท่อ สำหรับ λ_n นั้นในทางคณิตศาสตร์จะเรียกว่าค่าเฉพาะ (Eigenvalue) โดยหาได้จากสมการลักษณะเฉพาะ (The characteristic equation) คือ

$$\left[\lambda_n J_0(\lambda_n \delta) + \left(\beta - \frac{1}{\delta} \right) J_1(\lambda_n \delta) \right] \left[\lambda_n Y_0(\lambda_n) + (\alpha - 1) Y_1(\lambda_n) \right] - \left[\lambda_n Y_0(\lambda_n \delta) + \left(\beta - \frac{1}{\delta} \right) Y_1(\lambda_n \delta) \right] \left[\lambda_n J_0(\lambda_n) + (\alpha - 1) J_1(\lambda_n) \right] = 0$$

จะเห็นได้ว่า λ_n ขึ้นกับอัตราส่วนรัศมี (δ) และอัตราส่วน壁厚ของ ท่อ ซึ่งสัมพันธ์กับความถี่ธรรมชาติของท่อและรัศมีภายนอกของท่อตามสมการ (11) ดังนั้นเมื่อแทนตัวเลขลงในสมการ (11) และ (15) จะคำนวณ λ_n และ ω_n ของท่อได้ เช่น ท่อเหล็ก มีอัตราส่วน壁厚ของเท่ากับ 0.3 รัศมีภายนอกเท่ากับ 254 mm อัตราส่วนรัศมีของท่อเท่ากับ 0.5 และ 0.7 ผลของ λ_n และ ω_n ของท่อนี้ ได้ดังตาราง 1 และท่อนี้จะมีลักษณะการสั่น (Mode shape) ของท่อตามสมการ (13) ได้ดังรูป 3

ตาราง 1 แสดง λ_n และ ω_n สำหรับ $\delta = 0.5$ และ 0.7

n	$\delta = 0.5$		$\delta = 0.7$	
	λ_n	ω_n (rad/s)	λ_n	ω_n (rad/s)
1	1.2665	29,295	1.0780	24,935
2	6.4331	148,800	10.5338	243,649
3	12.6386	292,335	20.9745	485,147
4	18.8973	437,100	31.4363	727,130
5	25.1684	582,153	41.9031	969,232



รูป 3 ลักษณะการสั่นของท่อ (Mode shape)

4 ผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์และผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเค้น

4.1 ผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ของความเค้น

เมื่อหาผลเฉลยของตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับ $\tilde{u}(\tilde{r}, t)$ ได้ครบทุกตัวแล้วทำให้ได้ผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ของ $\tilde{u}(\tilde{r}, t)$ ที่สมบูรณ์ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\tilde{r}, t) = & \frac{(1+\nu)P(1-e^{-\gamma t})}{E\left(\frac{1}{\delta^2}-1\right)}\left((1-2\nu)\tilde{r}+\frac{1}{\tilde{r}}\right)-\nu k\tilde{r} \\ & +\Lambda\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[M_n\left(q_n J_1(\lambda_n \tilde{r})+Y_1(\lambda_n \tilde{r})\right)\right]\frac{T_n(t)}{\Lambda}\right\} \end{aligned} \quad (16)$$

และจากสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและการขจัดจะได้อผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ของความเค้นคือ

$$\begin{aligned} \sigma_r(\tilde{r}, t) = & \frac{\left(1-\frac{1}{\tilde{r}^2}\right)}{\left(\frac{1}{\delta^2}-1\right)}P(1-e^{-\gamma t}) \\ & +\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[M_n\left(\frac{(-1+\alpha)}{\tilde{r}}\left(q_n J_1(\lambda_n \tilde{r})+Y_1(\lambda_n \tilde{r})\right)\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left.+ \lambda_n\left(q_n J_0(\lambda_n \tilde{r})+Y_0(\lambda_n \tilde{r})\right)\right)\right]\frac{T_n(t)}{\Lambda}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(\tilde{r}, t) = & \frac{\left(1+\frac{1}{\tilde{r}^2}\right)}{\left(\frac{1}{\delta^2}-1\right)}P(1-e^{-\gamma t}) \\ & +\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[M_n\left(\frac{(1-\alpha)}{\tilde{r}}\left(q_n J_1(\lambda_n \tilde{r})+Y_1(\lambda_n \tilde{r})\right)\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left.+ \alpha\lambda_n\left(q_n J_0(\lambda_n \tilde{r})+Y_0(\lambda_n \tilde{r})\right)\right)\right]\frac{T_n(t)}{\Lambda}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(\tilde{r}, t) = & \frac{2\nu}{\left(\frac{1}{\delta^2}-1\right)}P(1-e^{-\gamma t})+Ek \\ & +\sum_{n=1}^{\infty}\left\{M_n\lambda_n\alpha\left(q_n J_0(\lambda_n \tilde{r})+Y_0(\lambda_n \tilde{r})\right)\frac{T_n(t)}{\Lambda}\right\} \end{aligned} \quad (17)$$

โดย $T_n(t)$, q_n และ M_n ได้จากสมการ (12), (14) และ (15) ตามลำดับ

จะเห็นว่าผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ของการขจัดและความเค้นดังสมการ (16) และ (17) มีความสมบูรณ์เพราะมีส่วนที่แสดงให้เห็นพฤติกรรมเชิงพลศาสตร์ของการขจัดและความเค้นด้วย

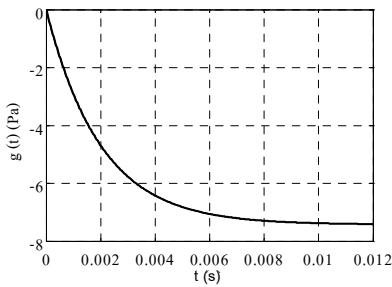
4.2 ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเค้น

ผลเฉลยเชิงตัวเลขของความเค้นจะแสดงความเค้นที่เกิดในท่อเมื่อเปลี่ยนแปลงขนาดท่อ อัตราส่วนรัศมีภายในต่อรัศมีภายนอกของท่อ ความเครียดในแนวแกนของท่อ และตัวแปรที่บอกพฤติกรรมเชิงพลศาสตร์ของความเค้น พบว่าเมื่อภาวะกระทำดังรูป 4 ความเค้นที่เกิดในท่อจะเกิดสูงสุดที่ตำแหน่งขอบในของท่อ ต่อไปจะแสดงผลของความเค้นในแนวเส้นสัมผัสที่ขอบในของท่อเท่านั้น เมื่อแปรค่าอัตราส่วนรัศมีของท่อเป็น 0.3, 0.5 และ 0.7 ได้ผลดังรูป 5 แปรค่าความเครียดในแนวแกนเป็น 0, 1 และ 3 $\mu\text{m/m}$ ได้ผลดังรูป 6 สำหรับตัวแปรที่บอกพฤติกรรมเชิงพลศาสตร์คือช่วงเวลาที่ความเค้นเพิ่มจากศูนย์ถึงสูงสุดซึ่งไปเกี่ยวข้องกับ γ ดังนั้นจึงแปรค่า γ เท่ากับ 10, 500 และ 55,000 $1/\text{s}$ ได้ผลดังรูป 7 ซึ่งจากรูป 7(ข) อัตราส่วนของความเค้นในแนวเส้นสัมผัสสูงสุดต่อความเค้นในแนวเส้นสัมผัสเฉลี่ยเท่ากับสองเท่า

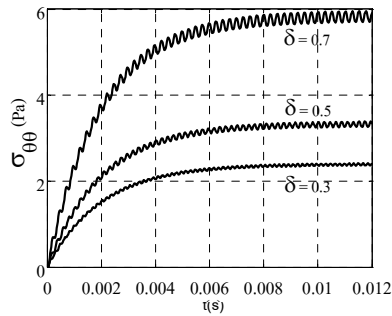
5. สรุปผล

สำหรับปัญหาท่อยาวรับความดันภายในอัดค้ำนี้พิจารณาการขจัดเป็นหลักและให้ท่ออยู่ในสภาพหนึ่งที่เวลาเริ่มต้น สมมุติให้วัตถุท่อเป็นวัตถุเอกพันธ์และมีคุณสมบัติเหมือนกันในทุกทิศทาง ความเค้นอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้นและสมมาตรรอบแกนกลางของท่อ เมื่อใช้หลักการความยืดหยุ่นเชิงพลศาสตร์และพิจารณาเป็นปัญหาสองมิติกรณีความเครียดระนาบทั่วไปจะได้สมการควบคุมเริ่มต้นเป็นสมการพลวัตที่มีเงื่อนไขที่ขอบชนิดไฮโอโมจีเนียสและสัมพันธ์กับเวลาดังสมการ (8) ที่มีลักษณะทางวิชาการเรียกว่าปัญหาค่าที่ขอบและค่าเริ่มต้นที่การหาผลเฉลยทำได้ยากและยังไม่มีวิธีการอย่างเป็นทางการมาก่อน การศึกษาที่จึงเสนอวิธีแก้สมการดังกล่าวโดยแยกสมการออกเป็นสองส่วน กำหนดให้ส่วนที่หนึ่งถูกเลือกจากการพิเคราะห์เพื่อทำให้ส่วนที่เหลือมีเงื่อนไขที่ขอบชนิดไฮโอโมจีเนียสและสามารถใช้ระเบียบวิธีแยกตัวแปรแก้ปัญหาได้จากนั้นนำผลเฉลยแต่ละส่วนที่หาได้มารวมกันจะทำให้ได้ผลเฉลยเชิงคณิตศาสตร์ของการขจัดและความเค้นที่แปรผันกับเวลาที่สมบูรณ์ดังสมการ (16) และ (17) ที่มีส่วนแสดงให้เห็นพฤติกรรมเชิงพลศาสตร์อย่างชัดเจน

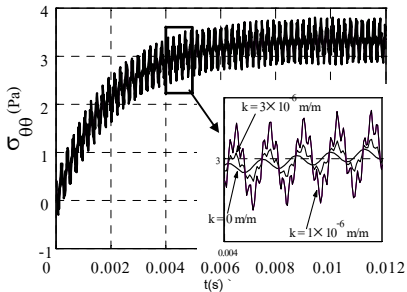
ผลเฉลยเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นว่าความเค้นสถิตเพิ่มส่งผลให้การขจัดและความเค้นเพิ่มขึ้นด้วย รัศมีภายนอกของท่อเมื่อผลการเกิดการขจัดและความเค้นน้อยมากถ้าอัตราส่วนรัศมีของท่อคงที่ อัตราส่วนรัศมีของท่อเพิ่มส่งผลให้การขจัดและความเค้นเพิ่มถ้ารัศมีภายนอกของท่อคงที่ ในขณะที่ความเครียดในแนวแกนสูงมากจะทำให้ความเค้นในแนวแกนสูงมากจนอาจเป็นตัวกำหนดความเค้นสูงสุดที่ท่อได้รับด้วยผลของพฤติกรรมเชิงพลศาสตร์ของความเค้นคือถ้าช่วงเวลาที่ความเค้นเพิ่มจากศูนย์ถึงสูงสุดน้อยลงทำให้แอมพลิจูดของการขจัดและความเค้นสูงขึ้น ถ้าช่วงเวลาดังกล่าวน้อยมากการขจัดและความเค้นสูงสุดจะสูงกว่าการขจัดและความเค้นเฉลี่ยมาก แต่ถ้าช่วงเวลาดังกล่าวมากกว่าการขจัดและความเค้นสูงสุดจะสูงกว่าการขจัดและความเค้นเฉลี่ยน้อยจนสามารถใช้สมการความเค้นแบบสถิตศาสตร์หาผลเฉลยแทนได้



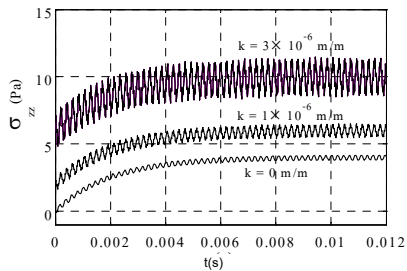
รูป 4 ภาวะกระทำกับแกนของเวลา เมื่อ $P=2$ MPa, $\gamma=500$ 1/s,
 $b=254$ mm, $\delta=0.5$ และ $k=0$ $\mu\text{m/m}$



รูป 5 ความเค้นในแนวเส้นสัมผัสกับเวลาเมื่อ $P=2$ MPa, $\gamma=500$ 1/s,
 $b=254$ mm, $\delta=0.3, 0.5$ และ 0.7 และ $k=0$ $\mu\text{m/m}$

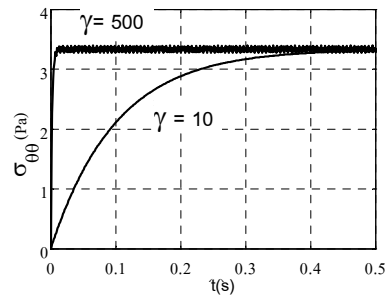


(ก) ความเค้นในแนวเส้นสัมผัส

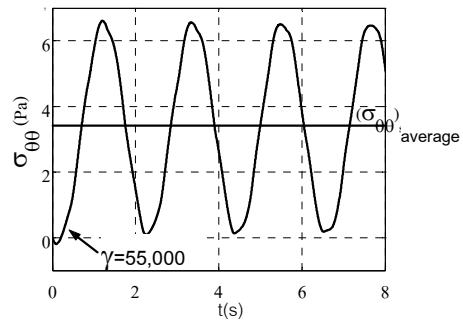


(ข) ความเค้นในแนวแกน

รูป 6 ความเค้นในแนวเส้นสัมผัสและแนวแกนกับเวลา เมื่อ $P=2$ MPa,
 $\gamma=500$ 1/s, $b=254$ mm, $\delta=0.5$ ที่ $k=0, 1$ และ 3 $\mu\text{m/m}$



(ก) เมื่อ $\gamma=10$ และ 500 1/s



(ข) $\gamma=55,000$ 1/s

รูป 7 ความเค้นในแนวเส้นสัมผัสกับเวลา เมื่อ $P=2$ MPa, $b=254$ mm,
 $\delta=0.5$ และ $k=0$ $\mu\text{m/m}$

6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Margetson, J. and Stanley, P. 1976. "Stress and failure probability analysis for a transversely isotropic, brittle, elastic cylinder subjected to internal pressure and axisymmetric thermal loading." International Journal of Mechanics Science., Vol. 18, pp 561-570.
- [2] Shawki, G. S. A. and El-Wahi, S. H. 1969. "Strength of thick-walled permeable cylinders." International Journal of Mechanics Science., Vol. 12, pp 535-551.
- [3] Kandil, A. 1996. "Analysis of thick-walled cylindrical pressure vessels under the effect of cyclic internal pressure and cyclic temperature." International Journal of Mechanics Science., Vol. 38, No. 12, pp 1319-1332.
- [4] Faupel, J. H. and Franklin, E. F. 1981. *Engineering Design*. 2nd ed. The United States of America: John Wiley & Sons, Inc, pp 644.
- [5] Ting, E. C. and Tuan, J. L. 1972. "Effect of cyclic internal pressure on the temperature distribution in a viscoelastic cylinder." International Journal of Mechanics Science., Vol. 15, pp 861-871.
- [6] Faupel, J. H. 1971. "The design of vessels for high pressure" in Pressure Vessel Engineering Technology. Great Britain: Galliard Limited, Great Yarmouth, England, pp 405-411.