

## การวิเคราะห์การกระจายความเค้นภายในวัสดุที่แตกต่างกัน Analysis of the Stress Distribution in Dissimilar Materials

เอกพล เตี้ยซัว<sup>1\*</sup> มูฮัมมัด ทรงชาติ<sup>1</sup> และ มนต์ชัย พงศ์ชัยวิไลเลิศ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>สาขาวิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีปทุม  
61 ถ.พหลโยธิน เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

<sup>2</sup>ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์  
อ.คลองหลวง จ.ปทุมธานี 12121

\*ติดต่อ: E-mail: [ekkaponspu@hotmail.com](mailto:ekkaponspu@hotmail.com) โทรศัพท์: 662-579-1111 โทรสาร: 662-579-1111

### บทคัดย่อ

จากปัญหาความเสียหายที่เกิดขึ้นกับวัสดุ 2 ชนิดที่ยึดติดกันบริเวณที่มีความเค้นสูงมากไม่ว่าจะที่ขอบ ที่มุม หรือที่ผิวสัมผัสกัน บทความนี้จึงได้ทำการวิเคราะห์การกระจายความเค้นของวัสดุ 2 ชนิดที่แตกต่างกันทางด้านคุณสมบัติทางกล ได้แก่ ค่าความยืดหยุ่นของวัสดุ และมีผิวเชื่อมต่อแบบอุดมคติในรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอก ที่อยู่ภายใต้ความเค้นดึงอย่างสม่ำเสมอ โดยการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element Method, FEM) ได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับทฤษฎีกลศาสตร์ของวัสดุเบื้องต้น ผลที่ได้พบว่า ที่อัตราส่วนความยืดหยุ่นที่ 1:1 มีลักษณะการกระจายความเค้นที่สอดคล้องกับทฤษฎีดั้งเดิมที่ว่า ความแปรผันของความเค้นบนหน้าตัดจะมีค่าน้อยบนหน้าตัดที่อยู่ห่างออกไปจากจุดที่มีแรงมากกระทำ และความแปรผันจะเห็นได้ชัดตรงบริเวณที่ใกล้เคียงกับจุดที่มีแรงมากกระทำ และพบว่าที่อัตราส่วนความยืดหยุ่น 1:2 และ 1:3 การกระจายความเค้นในแบบ 3 มิติของวัสดุนั้นแตกต่างจากทางทฤษฎีกลศาสตร์ของวัสดุเบื้องต้นอย่างชัดเจน

**คำหลัก:** การกระจายความเค้น วัสดุต่างชนิดกัน ไฟไนต์เอลิเมนต์

### Abstract

As we know well, the failure of dissimilar materials always occurs near the edge, corner and interface of the structure. In the present paper, analysis of the stress distribution of two dissimilar materials model in shape of prismatic and cylindrical by varying Young's modulus under uniform constant tensile stress. Displacements from classic theory are verified and compared with the results obtained by FEM program. We found that for the model of dissimilar materials with the ratio  $E1/E2=1$ , stress distributions obtained by FEM are according with those of classic theory. The variation of stress is not much on the cross section area far from the applied force. While the variation of stress obviously appears on the area near the applied force. Furthermore, for  $E1/E2 = 2$  and  $3$ , the stress distributions in 3D of dissimilar materials models are obviously different from the classic theory.

**Keywords:** Stress distribution, Dissimilar materials, Finite Element

## 1. บทนำ

จากความจำเป็นในงานวิศวกรรมที่ใช้วัสดุตั้งแต่ 2 ชนิดที่ยึดติดกันมีความต้องการมากขึ้น โดยเฉพาะในงานอุตสาหกรรมประเภทอิเล็กทรอนิกส์ ปัญหาต่างๆ ในงานก็ถูกวิเคราะห์ หรือทดลอง เพื่อลดปัญหาความเสียหายที่อาจเกิดขึ้นจากการเกิดความเค้น (Stress) ที่มีค่าสูงในบริเวณต่างๆ ไม่ว่าจะเป็นที่ขอบ ที่มุม หรือบริเวณพื้นที่เล็กๆ ซึ่งย่อมจะมีโอกาสเกิดความเสียหายมากกว่า หรือค่าการเคลื่อนตัว (Displacement) เกินค่าที่ยอมรับได้ อย่างไรก็ตาม ต้องทำความเข้าใจก่อนว่า การพิจารณาตามหลักสถิตยศาสตร์นั้นต้องตั้งอยู่บนสมมติฐานที่ว่า วัสดุต้องมีเนื้อเป็นแบบเอกพันธ์ (Homogenous) คุณสมบัติของวัสดุต้องเท่ากันทุกทิศทาง (Isotropic Material) ต้องอยู่ในช่วงยืดหยุ่น (Elastic) ที่เป็นไปตามกฎของฮุก (Hook's Law) และถ้ามีความเข้าใจในคุณสมบัติของวัสดุทางวิศวกรรมด้วยแล้ว จะทำให้การวิเคราะห์และแก้ปัญหาทางง่ายขึ้นด้วย จากงานวิจัยที่ผ่านมา Kokuchi [1] ได้ตรวจสอบค่าระดับความเค้นเชิงกลูการิตีที่จุดมุมและบนเส้นความเค้นเชิงกลูการิตีระหว่างวัสดุสองชนิดติดกันที่มีคุณสมบัติต่างกัน ในแบบ 3 มิติ โดยใช้การวิเคราะห์ค่าอันดับของความเค้น ส่วนการกระจายตัวของความเค้นรอบจุดมุมทำได้โดยวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ (Boundary element) Kokuchi [2] ได้ประมาณค่าอันดับของความเค้นบริเวณเชิงกลูการิตีจากความเค้นที่ได้จากวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ด้วยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least square method)

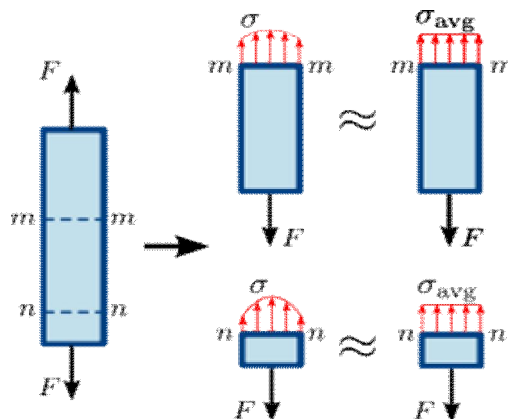
มนต์ชัย [3] ได้ศึกษาการกระจายตัวของความเค้นค่าตัวประกอบความเค้นของความเค้นรอบจุดมุมของรอยต่อของวัสดุต่างชนิดกัน ที่มีผิวเชื่อมต่อภายในและอยู่ภายใต้ภาระการเปลี่ยนแปลงทางอุณหภูมิด้วยระเบียบวิธีทางบาวนด์รีเอลิเมนต์ กิติศักดิ์ และอรรถพร [4] ได้หาค่าความเค้นของความเค้นบริเวณเชิงกลูการิตี (Intensity of Stress Singularity) รอบบริเวณจุดมุมของรอยต่อวัสดุที่เชื่อมต่อกันแบบอุดมคติโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ พร้อมกับเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากวิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ (Boundary Element)

สำหรับบทความนี้ ได้พิจารณาการกระจายความเค้น (Stress Distribution) ที่เกิดขึ้นกับวัสดุ 2 ชนิดที่มีคุณสมบัติที่ต่างกันตามค่าความยืดหยุ่นของวัสดุ ภายใต้ภาระที่เป็นความเค้นดึง และมีเงื่อนไขการจับยึดที่เหมือนกัน บนหน้าตัดกึ่งกลางของวัสดุทั้ง 2 และผิวสัมผัส (Interface) หลังจากที่ได้มีการตรวจสอบผลการเคลื่อนตัวที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดทั้งสามตามวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และทฤษฎีกลศาสตร์วัสดุเบื้องต้น

## 2. วิธีการ

จากแรงต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ หรือความเค้นของแรงที่กระจายบนหน้าตัด ที่เรียกว่า ความเค้น

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1)$$



รูปที่ 1 การแปรผันความเค้นบนหน้าตัดของวัสดุ

โดยทั่วไปค่าความเค้น  $\sigma$  ที่จุดใดๆ บนหน้าตัดจะมีค่าแตกต่างจากค่าเฉลี่ยที่ได้จากสมการที่ (1) และจะพบว่าค่าของ  $\sigma$  จะแตกต่างกันไปสำหรับแต่ละจุดบนหน้าตัด ดังรูปที่ 1 ความแปรผันของความเค้นบนหน้าตัดจะมีค่าน้อยบนหน้าตัดที่อยู่ห่างออกไปจากจุดที่มีแรงมากกระทำ แต่ความแปรผันจะเห็นได้ชัดตรงบริเวณที่ใกล้เคียงกับจุดที่มีแรงมากกระทำ และสำหรับค่าความเค้นที่นิยมใช้ในการออกแบบ สำหรับงานของแข็งในแบบ 3 มิติ คือความเค้นฟอนมิสเสส (Von Mises Stress) ดังสมการที่

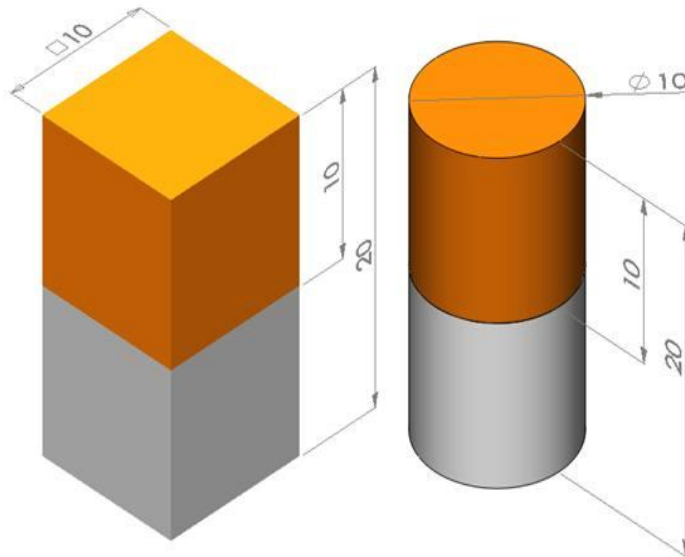
$$\sigma = \sqrt{0.5[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (2)$$

เมื่อ  $\sigma_x$   $\sigma_y$   $\sigma_z$   $\tau_{xy}$   $\tau_{yz}$  และ  $\tau_{zx}$  คือส่วนประกอบความเค้นของเอลิเมนต์ในระบบ 3 มิติ และสำหรับการแก้ปัญหาในทางไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite Element) นั้น จะเป็นไปตามสมการ

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (3)$$

เมื่อ  $[K]$  เอลิเมนต์เมตริกซ์ของความแข็งแรง  $\{u\}$  คือเมตริกซ์การเคลื่อนตัวที่จุดต่อ และ  $\{F\}$  คือเมตริกซ์ของแรงกระทำที่จุดต่อ ผลลัพธ์จากการวิเคราะห์ไฟไนต์เอลิเมนต์ดังสมการที่ (3) เตรียมไว้เพื่อหาค่าระยะการเคลื่อนตัว แล้วจึงนำไปสู่การหาค่าความเครียด (Stain) และความเค้นต่อไป ด้วยความสามารถของคอมพิวเตอร์ที่เราสามารถแบ่งเอลิเมนต์ออกได้อย่างละเอียดเท่าที่เราต้องการ ทำให้ผลลัพธ์ของค่าความเค้นที่ได้ เป็นความเค้นที่แท้จริงในแบบ 3 มิติ มีความแม่นยำมากขึ้น

### 3. แบบจำลอง และการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์

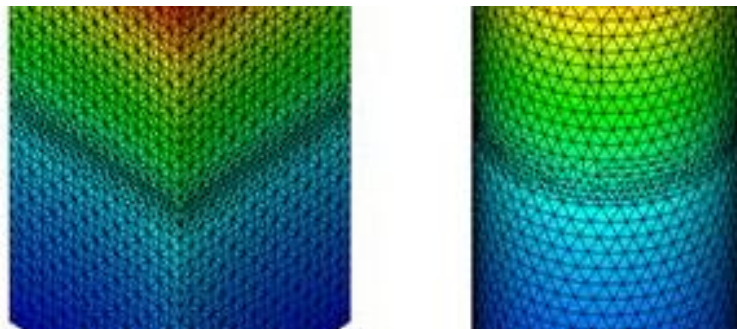


รูปที่ 2 วัสดุ 2 ชนิดติดกันในรูปทรงสี่เหลี่ยม และแบบทรงกระบอก

ตารางที่ 1 ตารางแสดงคุณสมบัติของวัสดุ

วัสดุ	Young's Modulus (GPa)	Poisson's ratio
$E_1$	200	0.29
$E_2$	200	0.27
$E_3$	100	0.33
$E_4$	69	0.33

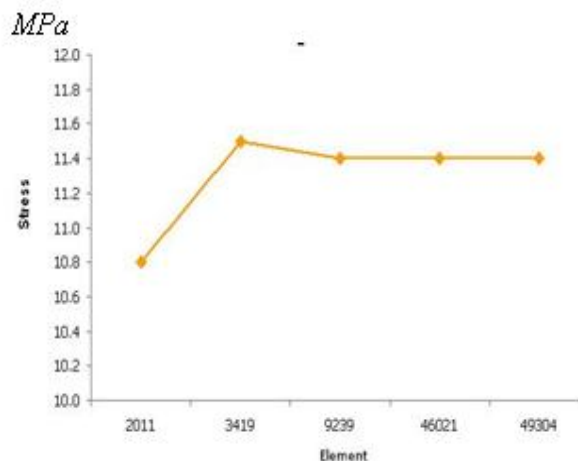
ในการจำลองรูปทรงของวัสดุ 2 ชนิดที่ติดกันแสดงดังรูปที่ 2 ทั้งในแบบทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอก โดยที่วัสดุชั้นล่างเป็น AISI 1020 ( $E_1$ ) ส่วนด้านบนเป็น AISI 316L ( $E_2$ ) Brass ( $E_3$ ) และ 1060 Alloy จากคุณสมบัติที่แสดงดังตารางที่ 1 เพื่อให้เป็นไปตามอัตราส่วนความยืดหยุ่นที่อัตราส่วน 1:1 1:2 1:3 สำหรับเงื่อนไขการจับยึด (Boundary Conditions) จะให้ปลายด้านล่างของวัสดุชั้นล่าง (A) ถูกยึดแน่น (Fixed) และให้ภาระความเค้นดึง ขนาด 10 MPa กระทำกับผิวด้านบนวัสดุด้านบนของชั้นที่อยู่ด้านบน หลังจากนั้นก็ทำการแบ่งเอลิเมนต์ (Meshing) โดยได้เลือกเอลิเมนต์เป็นแบบทรงเหลี่ยมสี่หน้า 10 node และทำการปรับแต่งขนาดเอลิเมนต์ (Mesh Control) โดยเฉพาะที่มุม และบริเวณขอบของผิวสัมผัสทั้ง 2 เพราะเป็นบริเวณที่จะเกิดความเค้นสูงๆ ดังรูปที่ 3



รูปที่ 3 แบบจำลองการแบ่งเอลิเมนต์ที่ใช้ทำการวิเคราะห์

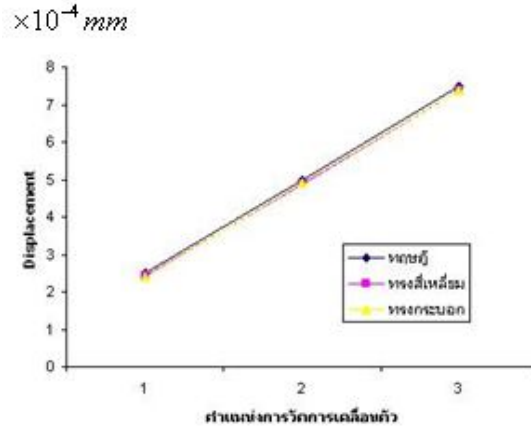
#### 4. ผลการวิเคราะห์

เพื่อให้ได้ผลที่น่าเชื่อถือจึงได้ทดสอบการลู่เข้าของค่าความเค้นที่เกิดขึ้นกับจำนวนเอลิเมนต์ที่ได้เลือก ดังรูปที่ 4

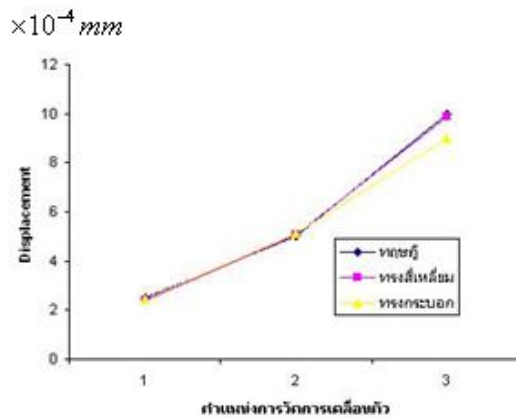


รูปที่ 4 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและจำนวนเอลิเมนต์

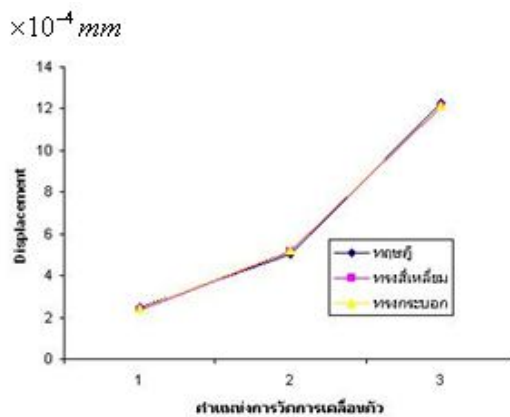
สำหรับผลของการเปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวที่ได้ตามทฤษฎีกลศาสตร์วัสดุเบื้องต้น และวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่ตำแหน่งกึ่งกลางของวัสดุชิ้นล่าง (1) บริเวณผิวสัมผัสกัน (2) และกึ่งกลางของวัสดุชิ้นบน (3) ทั้งรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอก ตามอัตราส่วนของความยืดหยุ่นวัสดุที่กำหนด คือ 1:1 1:2 1:3 ตามลำดับ ดังรูปที่ 6 7 และ 8



รูปที่ 6 เปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวทางทฤษฎี กับวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอก อัตราส่วน 1:1

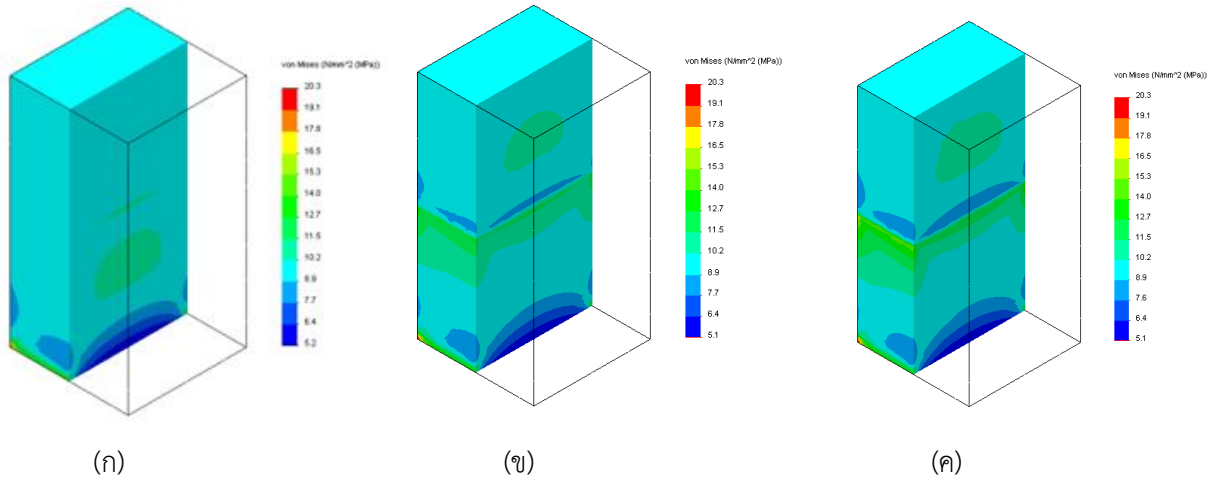


รูปที่ 7 เปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวทางทฤษฎีกับวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอก อัตราส่วน 1:2

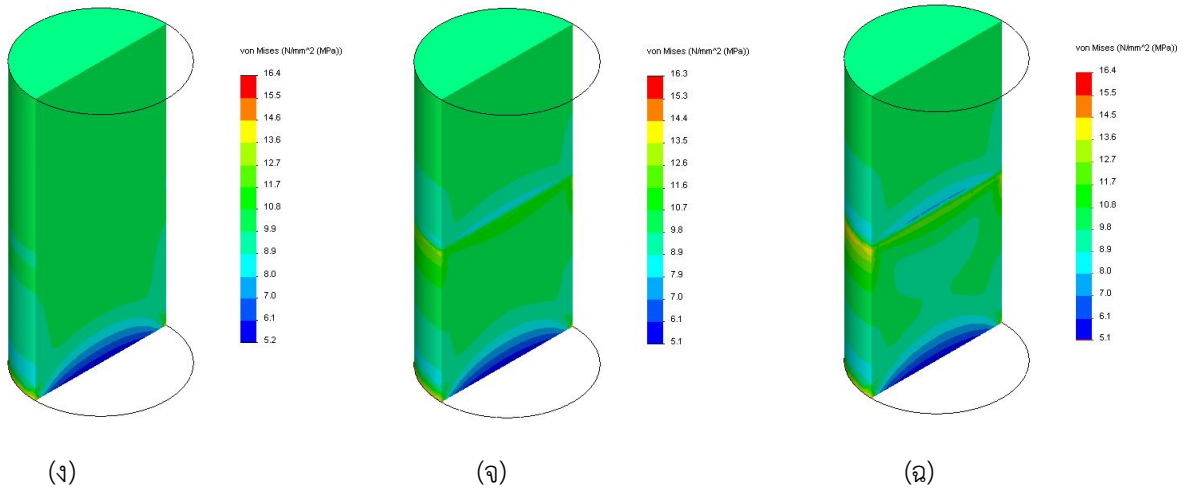


รูปที่ 8 เปรียบเทียบค่าการเคลื่อนตัวทางทฤษฎีกับวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอก อัตราส่วน 1:3

จากผลการเปรียบเทียบพบว่าค่าการเคลื่อนตัวตามทฤษฎีพื้นฐาน และวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ทั้งสองรูปทรงพบว่าที่อัตราส่วนความยืดหยุ่นที่ 1:1 นั้นให้ค่าที่ใกล้เคียงกันมาก และมีลักษณะความสัมพันธ์เป็นแบบเชิงเส้น แต่ในกรณีอัตราส่วนความยืดหยุ่นที่ 1:2 และ 1:3 นั้น ค่าที่ได้จะมีความแตกต่างกันเล็กน้อย และมีลักษณะไม่เป็นแบบเชิงเส้น เมื่อผลของการเคลื่อนตัวได้ตรวจสอบความถูกต้องแล้วจึงนำไปสู่การหาค่าการกระจายความเค้นของวัสดุ 2 ชนิดที่ติดกันสำหรับรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอกที่มีอัตราส่วนค่าความยืดหยุ่นที่เป็น 1:1 1:2 และ 1:3 ดังรูปที่ 9 และ 10



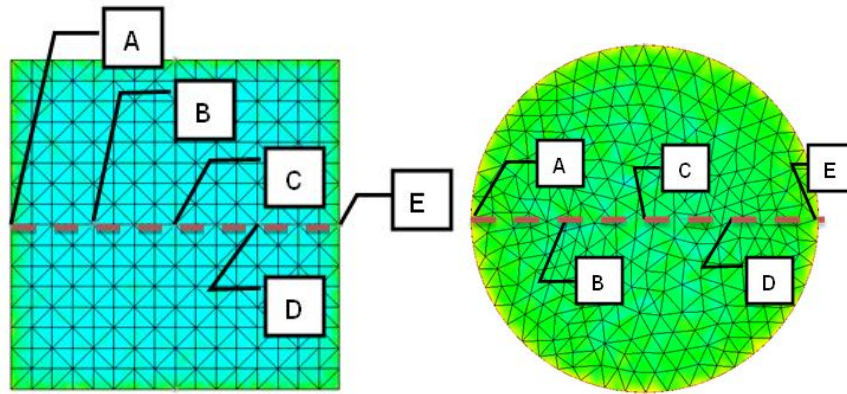
รูปที่ 9 กระจายความเค้นของวัสดุ 2 ชนิดที่ติดกันในรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีอัตราส่วนค่าความยืดหยุ่น 1:1 (ก) 1:2(ข) และ 1:3(ค)



รูปที่ 10 กระจายความเค้นของวัสดุ 2 ชนิดที่ติดกันในรูปทรงกระบอกที่มีอัตราส่วนค่าความยืดหยุ่น 1:1 (ง) 1:2(จ) และ 1:3(ฉ)

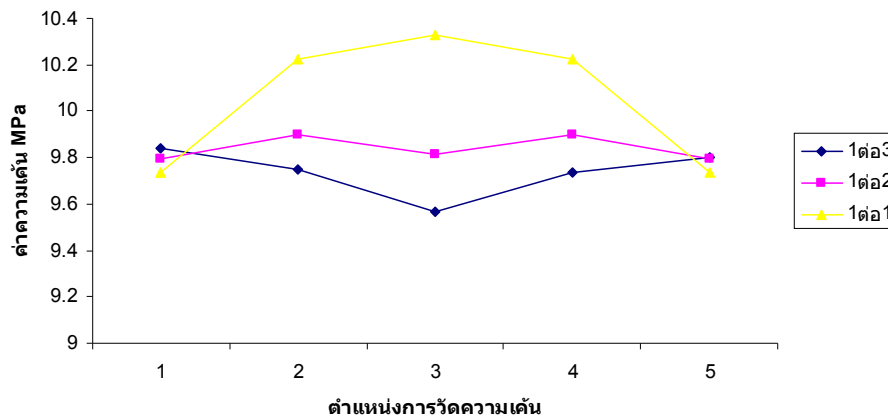
เมื่อทำจากการวัดค่าความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดทั้งสามบริเวณคือที่ตำแหน่งกึ่งกลางของวัสดุชิ้นล่าง บริเวณผิวสัมผัสกัน และกึ่งกลางของวัสดุชิ้นบน อย่างละ 5 จุดที่มีระห่างเท่ากันตลอดหน้าตัดดังรูปที่ 11



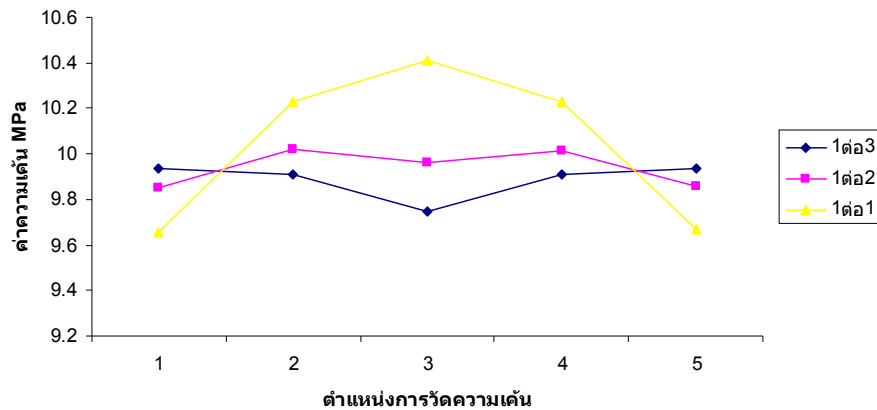


รูปที่ 11 ตำแหน่งการวัดความเค้นบนหน้าตัดของทรงสี่เหลี่ยม และรูปทรงระบอบ

พบว่าการกระจายความเค้นจะแปรผันน้อยบนหน้าตัดที่อยู่ห่างออกไปจากจุดที่มีแรงมากระทำ แต่จะแปรผันจะเห็นได้ชัดตรงบริเวณที่ใกล้เคียงกับจุดที่มีแรงมากระทำ ตามทฤษฎีที่ได้กล่าวมา และยังพบว่าที่ผิวสัมผัสของวัสดุทั้งสองยังพบการกระจายความเค้นบริเวณที่อัตราส่วนยืดหยุ่นที่ 1:1 มีค่าการกระจายตัวของความเค้นที่ค่อนข้างสม่ำเสมอกว่าที่อัตราส่วนความยืดหยุ่น 1:2 และ 1:3 และสำหรับรูปที่ 12 และ 13 เป็นการแสดงการแปรผันของความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดในวัสดุชิ้นล่าง หรือที่ระยะ 5 mm พบการแปรผันของความเค้นมีลักษณะที่ต่างกันไป กล่าวคือที่อัตราส่วนความยืดหยุ่นที่ 1:1 จะค่าความเค้นสูงสุดที่บริเวณกึ่งกลางผิว และจะลดน้อยลงเมื่อห่างออกไป แต่ในขณะที่อัตราส่วนความยืดหยุ่นที่ 1:2 และ 1:3 จะมีความไม่สม่ำเสมอ และมีค่าความเค้นเฉลี่ยที่ต่างออกไปจาก 10 MPa อย่างชัดเจนตามลำดับทั้งในรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงระบอบ เมื่อพิจารณาความเค้นในแบบ 3 มิติรวมๆ พบว่าการกระจายความเค้นภายในรูปทรงระบอบนั้นให้ค่าที่สม่ำเสมอกว่ารูปทรงสี่เหลี่ยม อีกทั้งค่าความเค้นสูงสุดที่ปรากฏขึ้นนั้นจะมีค่ามากกว่าบริเวณที่เป็นขอบและมุมบนของรูปทรงสี่เหลี่ยมอีกด้วย



รูปที่ 12 กราฟแสดงความแปรผันของความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดวัสดุชิ้นล่างในรูปทรงสี่เหลี่ยม ตามอัตราส่วนความยืดหยุ่น 1:1 1:2 และ 1:3



รูปที่ 13 กราฟแสดงความแปรผันของความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดวัสดุชั้นกลางใน

รูปทรงกระบอก ตามอัตราส่วนความยืดหยุ่น 1:1 1:2 และ 1:3

## 5. สรุปผล

จากการวิเคราะห์การกระจายความเค้นในวัสดุ 2 ชนิดที่แตกต่างกัน บนอัตราส่วนของค่าความยืดหยุ่นเป็น 1:1 1:2 และ 1:3 ที่มีผิวเชื่อมต่อแบบอุดมคติในรูปทรงสี่เหลี่ยม และทรงกระบอก ที่อยู่ภายใต้ความเค้นดึงอย่างสม่ำเสมอ เริ่มจากการทดสอบค่าการเคลื่อนตัวทางทฤษฎีพื้นฐาน ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลการวิเคราะห์ด้วยโปรแกรมทางไฟไนต์เอลิเมนต์ เพื่อนำไปสู่การหาราคาการกระจายความเค้นในวัสดุที่หน้าตัดของแต่ละวัสดุ และบริเวณผิวสัมผัส ผลลัพธ์ที่ได้พบที่อัตราส่วนความยืดหยุ่นที่ 1:1 มีลักษณะการกระจายความเค้นที่สอดคล้องกับทฤษฎีดั้งเดิมที่ว่า ความแปรผันของความเค้นบนหน้าตัดจะมีค่าน้อยบนหน้าตัดที่อยู่ห่างออกไปจากจุดที่มีแรงมากกระทำ และความแปรผันจะเห็นได้ชัดเจนบริเวณที่ใกล้เคียงกับจุดที่มีแรงมากกระทำ ซึ่งพบว่าที่อัตราส่วนความยืดหยุ่น 1:2 และ 1:3 ไม่เป็นไปตามทฤษฎีเบื้องต้น และจากข้อสังเกตของการกระจายความเค้นบริเวณที่ผิวสัมผัสของวัสดุทั้งสองยังพบว่า ที่อัตราส่วนยืดหยุ่นที่ 1:1 มีค่าการกระจายตัวของความเค้นที่ค่อนข้างสม่ำเสมอกว่าที่อัตราส่วนความยืดหยุ่น 1:2 และ 1:3 จากประโยชน์ตรงนี้จะเห็นว่าเป็นแนวทางสำหรับการที่จะคิดนำวัสดุมากกว่า 2 ชนิดในหลายรูปทรงมาเชื่อมต่อกัน เพื่อนำไปใช้งานภายใต้การรับภาระ และเงื่อนไขในแบบต่างๆ นอกจากนี้ความเค้นซิงกูลาริตี ก็เป็นสิ่งที่ควรให้ความสำคัญไม่น้อยไปกว่ากันตามที่ได้มีการนำเสนอในนำของบทความนี้ สำหรับข้อเสนอแนะคือ เพื่อเป็นการให้ผลมีความน่าเชื่อถือมากขึ้น จึงควรที่จะเพิ่มการพิจารณาการยึดจับชิ้นงานในแบบ Roller เพิ่มเติมเข้าไป เพราะการยึดจับแบบแน่น (Fixed) อาจมีผลต่อการกระจายตัวของความเค้นบนรอยต่อได้

## 6. เอกสารอ้างอิง

- [1] Koguchi, H., 1996. Stress singularity analysis in three - dimensional bonded structure, Journal of Solids Structures Vol. 34, pp. 461-480.
- [2] Koguchi, H., 2006. Stress singularity analysis in three-dimensional bonded structure Transactions of the JSME, Vol. 72, pp. 2058-2065
- [3] มนต์ชัย พุกษ์วีไลเลิศ, (2009). การวิเคราะห์ตัวประกอบความเข้มของความเค้นในวัสดุต่างชนิดกันภายใต้ภาระทางความร้อน, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23
- [4] กิตติศักดิ์ ทวีรัตน์ผล และอรุณพร วิเศษสินธุ์, (2009). การวิเคราะห์ค่าความเข้มของความเค้นซิงกูลาริตีที่รอยจุดมุมของรอยต่อวัสดุ 2 ชนิดโดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ, การประชุมวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 23