

การหาความถี่ธรรมชาติจากแบบจำลองทางพลศาสตร์ของแขนกลที่มีความยืดหยุ่นตัวสำหรับการ เอื้อมระยะไกล

Natural Frequency in Dynamic Model of a Long-Reach Flexible Manipulator Arm

วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ¹, และ กรรมมนต์ ชูประเสริฐ^{2*}

¹ ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถ.พญาไท ปทุมวัน กรุงเทพมหานคร 10330 โทร 0-2218-6610-1 โทรสาร 0-2252-8889

² ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

*ติดต่อ: E-Mail Viboon.S@eng.chula.ac.th, fengkmc@ku.ac.th

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการตรวจสอบพลศาสตร์จำลองโดยระเบียบวิธีไฟไนต์กับแขนกลแบบยืดหยุ่นตัวซึ่งมีห้าชิ้นส่วนสององศาอิสระพร้อมด้วยระบบมวลก้อนติดบนปลายแขนกลที่มีการยืดหยุ่นตัว โดยการเปรียบเทียบและรับรองค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากแบบจำลองนี้กับค่าความถี่ที่ได้จากการวัดได้จากอุปกรณ์ตรวจรู้ความเร่ง (accelerometer) โดยพิจารณาการสั่นที่ปลายแขนกลแบบยืดหยุ่นตัวที่ตำแหน่งองศาอิสระต่างๆกัน ผลที่ได้แสดงให้เห็นว่าการกำหนดลักษณะชนิดการยึดจับ (constraints or boundary condition) ในแบบจำลองพลศาสตร์ที่เสนอในงานวิจัยนี้ให้ผลลัพธ์ค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดต่างๆนั้นมีค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติที่วัดจากการสั่นที่องศาอิสระของแขนกลเดียวกัน ซึ่งแสดงว่าแบบจำลองทางพลศาสตร์ดังกล่าวมีความแม่นยำเพียงพอที่จะใช้ในการออกแบบตัวควบคุมต่อไป

คำหลัก: แขนกลแบบยืดหยุ่น, ความถี่ธรรมชาติ, ระเบียบวิธีไฟไนต์

Abstract

This research work contributes finite element method for the dynamic model of a five-bar linkage manipulator arm with two flexible links. Both flexible links are considered as a flexible link with lumped mass attached to it end to form a five-bar configuration. Natural frequencies found from the purposed dynamic model by using finite element method are compared with the vibration measured by accelerometer attached at the end of the longer flexible link. The natural frequencies found from both methods are very close. This means that the purposed dynamic model is accurate or good enough to use for controller design.

Keywords: Flexible manipulator arm, five-bar linkage, Natural frequency, finite element method

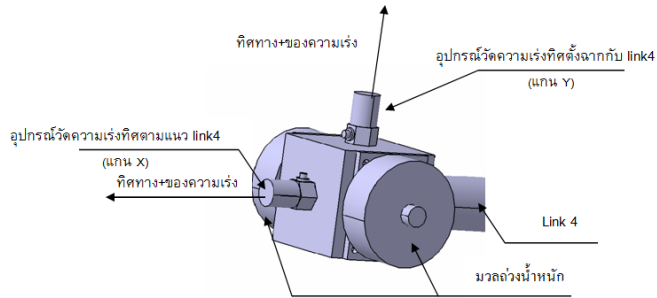
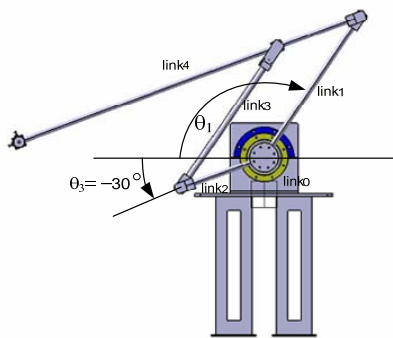
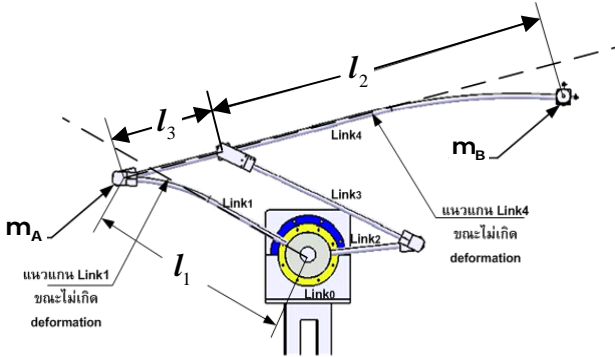
1. บทนำ

ในปัจจุบันได้มีการพัฒนาแขนกลให้สามารถรองรับงานในอุตสาหกรรมได้หลายลักษณะ ซึ่งโดยส่วน

ใหญ่แขนกลเหล่านี้ก็มีโครงสร้างแบบแขนเกร็ง เพื่อให้รูปแบบการเคลื่อนที่ของแขนกลสามารถตรวจวัดและควบคุมได้ง่าย แต่สำหรับพื้นที่งานที่อยู่ห่างออกไปแขน

กลจะถูกออกแบบให้มีช่วงแขนเอื้อมยาวขึ้นเพื่อเพิ่มพื้นที่การทำงาน (workspace) จึงได้มีการพัฒนาแขนกลให้มีน้ำหนักเบาและยืดหยุ่นตัวมากขึ้น ซึ่งส่งผลต่อการลดพลังงานและการสั่นสะเทือนในระหว่างการขับเคลื่อน แต่อย่างไรก็ตาม การควบคุมตำแหน่งปลายของแขนกลแบบยืดหยุ่นก็จะทำได้ยากกว่าเนื่องจากเกิดการแกว่งตัวที่ตำแหน่งปลายแขน และ รูปแบบของสมการแบบจำลองการเคลื่อนที่ของแขนกลก็จะเพิ่มความซับซ้อนขึ้นกว่าเดิม งานวิจัยส่วนใหญ่ที่ผ่านมาจะจำกัดที่แขนกลที่มีความยืดหยุ่นเพียงข้อต่อเดียว และเคลื่อนที่บนระนาบเดียว แต่ในงานวิจัยนี้ เราจะพิจารณาแขนกลที่มีความยืดหยุ่นสองแขน และใช้รูปแบบเป็นแบบ five-bar linkage เพื่อให้ปลายแขนกลสามารถเข้าถึงปริมาตรการทำงานในแบบ 3 มิติได้

ในทางทฤษฎีแล้วระบบแขนกลแบบยืดหยุ่นที่ได้มีการใช้สมการ partial differential เพื่อหาแบบจำลองสมการทางพลศาสตร์ของแขนกลจะพบความยุ่งยากซับซ้อนถึงแม้ว่าเป็นแขนกลเดี่ยวแบบยืดหยุ่นก็ตาม ส่งผลให้มีการใช้วิธี discretization ในการหาแบบจำลองแขนกล ในขณะที่แขนกลที่เสนอในงานวิจัยนี้มีโครงสร้างแบบ five-bar ตามรูปที่ 1 ซึ่งมีความซับซ้อนของสมการแบบจำลองที่มากกว่า การตรวจสอบค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดต่างๆจากสมการแบบจำลองพลศาสตร์ที่ได้จากระเบียบวิธีไฟไนต์ที่ กำหนดลักษณะจุดยึดต่อ (constraint หรือ boundary condition) ของแขนกลที่ถูกต้องจะให้ผลค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการหาอนุกรมฟูเรียร์ของข้อมูลจากตัวตรวจรู้ความเร่งที่ปลายแขนที่ตำแหน่งองศาอิสระเดียวกัน



รูปที่ 1 โครงสร้างของแขนกลแบบยืดหยุ่นที่ออกแบบไว้

2. การคำนวณหาค่าความถี่ของแขนกล

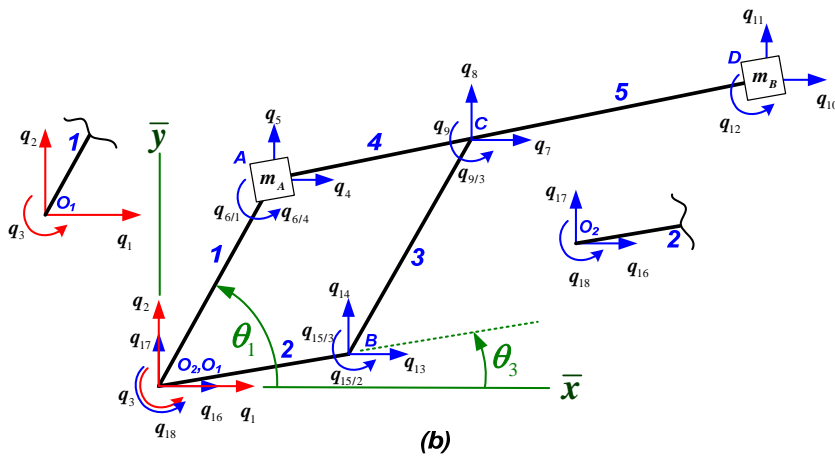
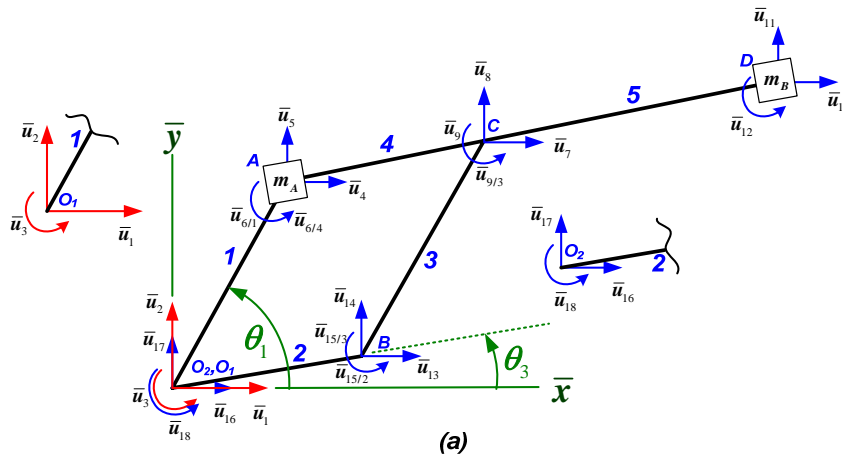
เนื่องด้วยความจริงที่ว่าแบบจำลองทางพลศาสตร์ของระบบสามารถบ่งบอกถึงชุดค่าความถี่ธรรมชาติที่เกี่ยวข้องของระบบชุดนั้นได้ แบบจำลองทางพลศาสตร์ของระบบแขนกลยืดหยุ่นจึงถูกสร้างขึ้นโดยจากขั้นตอนดังนี้คือ:

- ก) หาสมการลากรางจ์ของแต่ละชิ้นส่วนหรือเอลิเมนต์โดยเป็นแบบมวลก้อน (Lumped mass), กำหนดตัวแปรองศาอิสระที่จุดปลายของเอลิเมนต์
- ข) จัดรูปเป็นเมทริกซ์เอลิเมนต์ของมวลกับเมทริกซ์เอลิเมนต์ของความยืดหยุ่นของแท่งวัตถุ (rod bar) ร่วมกับคาน (beam) ในสมการลากรางจ์เอลิเมนต์นั้น
- ค) นำชุดสมการลากรางจ์เมทริกซ์เหล่านั้นมารวม

เป็นสมการลากรางจ์รวมซึ่งจะประกอบด้วยเมทริกซ์มวลระบบและเมทริกซ์ความยืดหยุ่นรวมของทั้งระบบแขนกลยืดหยุ่น

- ง) กำหนดลักษณะชนิดการยึดจับและนำเมทริกซ์มวลระบบและเมทริกซ์ความยืดหยุ่นระบบที่ได้มาคำนวณหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) และชุดค่าความถี่ธรรมชาติของระบบดังต่อไปนี้

จากรูปที่ 1 โครงสร้างของแขนกลประกอบด้วยก้านต่อโยงสี่ก้านมีมวลก้อน (Lumped mass) A และ B ติดที่ปลายก้านต่อโยงที่ 1 และ 4 ตามลำดับ ไม่คิดน้ำหนักของก้านต่อโยงทั้งสี่เมื่อเทียบกับมวล A, B อุปกรณ์ตัวรู้วัดความเร่งติดตั้งอยู่ที่ปลายก้านต่อโยงที่ 4 และมีมอเตอร์ตัวขับที่ 1 และ 2 หมุนปลายก้านต่อโยงที่ 1 และ 2 ตามลำดับ



รูปที่ 2 ระบบโครงสร้างแขนกลประกอบด้วย 5 เอลิเมนต์โดยที่
(a) แทนการขจัด \bar{u}_i บนเอลิเมนต์ของก้านต่อโยงบนเทอมพิกัดระบบ (global coordinates)
(b) แทนพิกัดระบบทั่วไป q_i (generalized coordinates) บนแขนกล



โครงสร้างของแกนกลชุดนี้ถูกแบ่งจำลองออกเป็นห้า
เอลิเมนต์คานดั่งในรูปที่ 2 โดยที่เอลิเมนต์ที่ 1, 2 และ 3
แทนด้วยก้านต่อโยงที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ เอลิเมนต์
ที่ 1 ต่อกับ 4 และเอลิเมนต์ 2 ต่อกับ 3 เชื่อมต่อกันด้วย
pin joint ที่จุด A และ B ตามลำดับ ส่วนเอลิเมนต์ที่ 4
และ 5 ที่เชื่อมติดกันแทนด้วยก้านต่อโยงที่ 4 ซึ่งต่อกับ
เอลิเมนต์ที่ 3 ด้วย pin joint ที่จุด C

กำหนดให้ที่จุดต่อปลายแต่ละเอลิเมนต์ทั้งหมดมีการ
ขจัด \bar{u}_i เท่ากับ 3 องศาอิสระ ดังนี้

element 1 element 2 element 3

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_{6/1} \end{Bmatrix}_1 \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_{13} \\ \bar{u}_{14} \\ \bar{u}_{15/2} \\ \bar{u}_{16} \\ \bar{u}_{17} \\ \bar{u}_{18} \end{Bmatrix}_2 \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_7 \\ \bar{u}_8 \\ \bar{u}_{9/3} \\ \bar{u}_{13} \\ \bar{u}_{14} \\ \bar{u}_{15/3} \end{Bmatrix}_3$$

element 4 element 5

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_{6/4} \\ \bar{u}_7 \\ \bar{u}_8 \\ \bar{u}_9 \end{Bmatrix}_4 \rightarrow \{\bar{u}_i\}_5 = \begin{Bmatrix} \bar{u}_7 \\ \bar{u}_8 \\ \bar{u}_9 \\ \bar{u}_{10} \\ \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \end{Bmatrix}_5$$

เมื่อพิกัดองศาอิสระที่จุดต่อของระบบแกนกลรวมบน
แกน \bar{xy} มีการเคลื่อนโดยอิสระ (unconstraint) จะได้
การขจัดเท่ากับ

$$\{q_i\} = \{q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_{6/1} \ \dots \ q_{18}\}_{21 \times 1}^T \quad (1)$$

เราสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่างการขจัด \bar{u}_i บนเอ
ลิเมนต์ใด ๆ กับพิกัดระบบทั่วไป q_i ด้วยสมการ

$$\{\bar{u}_i\}_e = A_e \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{18} \end{Bmatrix}_{21 \times 1} \quad (2)$$

ซึ่ง A_e เป็นเมตริกซ์สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วย 0 กับ
1 และจากสมการ (2) เขียนความสัมพันธ์ในเอลิเมนต์
หนึ่งถึงห้าได้โดย

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{u}_5 \\ \bar{u}_{6/1} \end{Bmatrix}_1 = A_1 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{18} \end{Bmatrix} \quad (2.1), \quad \begin{Bmatrix} \bar{u}_{13} \\ \bar{u}_{14} \\ \bar{u}_{15/2} \\ \bar{u}_{16} \\ \bar{u}_{17} \\ \bar{u}_{18} \end{Bmatrix}_2 = A_2 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{18} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_7 \\ \bar{u}_8 \\ \bar{u}_{9/3} \\ \bar{u}_{13} \\ \bar{u}_{14} \\ \bar{u}_{15/3} \end{Bmatrix}_3 = A_3 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{18} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \bar{u}_7 \\ \bar{u}_8 \\ \bar{u}_9 \\ \bar{u}_{10} \\ \bar{u}_{11} \\ \bar{u}_{12} \end{Bmatrix}_1 = A_5 \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{18} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

เมื่อเมตริกซ์สี่เหลี่ยมผืนผ้า A_e ในแต่ละเอลิเมนต์มีค่า
เท่ากับ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{6 \times 21}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 21}$$



$$R_2 = \begin{bmatrix} c(\pi+\theta_3) & s(\pi+\theta_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s(\pi+\theta_3) & c(\pi+\theta_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(\pi+\theta_3) & s(\pi+\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s(\pi+\theta_3) & c(\pi+\theta_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} c(\pi+\theta_1) & s(\pi+\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s(\pi+\theta_1) & c(\pi+\theta_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c(\pi+\theta_1) & s(\pi+\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s(\pi+\theta_1) & c(\pi+\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

$$R_4 = R_5 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & s\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\theta_3 & s\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s\theta_3 & c\theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

แทนค่าเมตริกซ์มวลและเมตริกซ์ความแข็งในสมการ(3)และ(4) ลงบนสมการพลศาสตร์สมการ(8)

$$[\bar{m}]_e \{\ddot{u}_i\}_e + [\bar{k}]_e \{\bar{u}_i\}_e = \{\bar{f}_i\}_e \quad (8)$$

ซึ่งเป็นสมการพลศาสตร์ของแต่ละเอลิเมนต์ e โดย e เป็นเอลิเมนต์ตั้งแต่ เอลิเมนต์ 1 ถึงเอลิเมนต์ 5

จากสมการเมตริกซ์มวลและเมตริกซ์ความแข็งที่ได้มาแล้ว ในแต่ละเอลิเมนต์นำมารวมหาเมตริกซ์ระบบมวลและเมตริกซ์ความแข็งของทั้งระบบได้ดังสมการ

$$M = \sum_{e=1}^5 A_e^T [\bar{m}]_e A_e \quad (8.1)$$

$$K = \sum_{e=1}^5 A_e^T [\bar{k}]_e A_e \quad (8.2)$$

พิจารณาให้แรงและแรงบิดภายนอกที่กระทำกับระบบนี้เท่ากับศูนย์

$$\{Q\} = \sum_{e=1}^5 A_e^T \{\bar{f}_i\}_e = \sum_{e=1}^5 A_e^T R^T \{f_i\}_e = \{0\} \quad (8.3)$$

จากผลรวมของกฎทรงพลังงานระหว่างพลังงานจลน์และพลังงานศักย์สปริงเมื่อไม่มีแรงภายนอกกระทำ

ต่อระบบจะมีค่าเท่ากับศูนย์ นำจัดในรูปของสมการพลศาสตร์ระบบแขนกล 2 องศาอิสระได้เป็น

$$M \{\ddot{q}_i\} + K \{q_i\} = \{0\} \quad (9)$$

โดย $\{q_i\}$ เป็นเวกเตอร์ตำแหน่งระบบทั่วไปตามสมการ (1)

จากลักษณะของแขนกลทั้งระบบตั้งรูปที่ (2a)

และ (2b) เมื่อกำหนดค่าองศาอิสระหรือระบุตำแหน่ง constraint ที่พิกัดระบบตำแหน่ง $\{q_i\}$ ดังนี้จะได้

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_{16} = q_{17} = q_{18} = 0$$

องศาอิสระของการสั่นระบบแขนกลจึงมีจำนวนเท่ากับ 15 องศาอิสระ

จากรูปที่ 1 เมื่อแขนกลที่ประกอบด้วยท่ออลูมิเนียมความหนาแน่น ($\gamma=2700$ กิโลกรัม/เมตร³) ค่ายังโมดูลัส(E) เท่ากับ 71 GPa ขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางนอกและในเท่ากับ 19 และ 13 มิลลิเมตร (พื้นที่หน้าตัด (A) = 150.7964E-6 เมตร²) ค่าพื้นที่โมเมนต์ความเฉื่อย (I) เท่ากับ 4995.13E-12 เมตร⁴ รัศมีไจเรชั่น(r)เท่ากับ

$$\sqrt{\frac{I}{A}} = 0.0058 \quad \text{ความยาวแขน } l_1, l_2 \text{ และ } l_3 \text{ เท่ากับ}$$

0.62, 0.32 และ 1 เมตร ตามลำดับ มวล A มีค่าเป็นศูนย์ในขณะที่มวล B มีค่าเท่ากับ 0.943 กิโลกรัม แทนค่าทั้งหมดลงในสมการเมตริกซ์เอลิเมนต์มวลที่ (3.1)-

(3.5) และสมการเอลิเมนต์เมตริกซ์ความยืดหยุ่นที่ (4.1)-(4.5)

เนื่องจากค่ามุม θ_1 เท่ากับ 115° , θ_3 เท่ากับ 22° สมการ(3.1)-(3.5)คูณด้วยเมตริกซ์การหมุน(R) ตามสมการ(5) แทนลงในสมการที่(8.1) จะได้เมตริกซ์มวลระบบ (M) สมการ(4.1)-(4.5)คูณด้วยเมตริกซ์การหมุน (R) ตามสมการ(6) แทนลงในสมการที่(8.2) จะได้เมตริกซ์ความยืดหยุ่นระบบ(K) จากเมตริกซ์มวลระบบและเมตริกซ์ความยืดหยุ่นระบบนำมาหาค่าลักษณะเฉพาะ(Eigen Value) และหาความถี่ธรรมชาติ โดยความถี่ธรรมชาติที่ได้จากระบบชุดนี้จะมีค่า

$$f_n = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 9.8 \\ 13.0 \\ 55.9 \\ 112.6 \\ 177.5 \\ 258.6 \\ 789.9 \\ 919.5 \\ 984.3 \\ 1985.3 \\ 2200.4 \\ 3333.5 \\ 3834.1 \\ 5023.6 \end{bmatrix} \text{ Hz}$$

3. การทดสอบหาความถี่ธรรมชาติของแขนกล

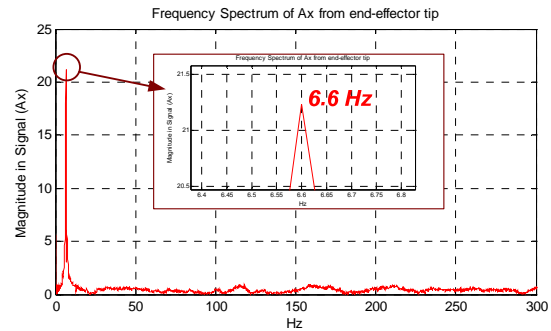
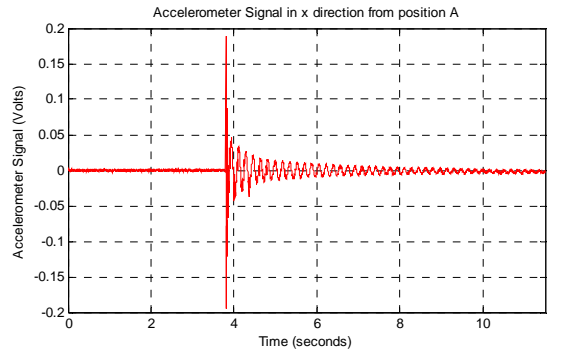
เนื่องจากรูปแบบระบบแขนกลมีความซับซ้อน ทำให้มีจำนวนองศาอิสระที่ความถี่สูงเกิดขึ้น ในขณะที่ค่าความถี่ต่ำนั้นจะถูกนำมาพิจารณาเพราะมีความสำคัญต่อระบบควบคุมที่จะสร้างต่อไป

จากรูปที่ 3 จะทำวิเคราะห์โดยวิธี FFT จากการวัดค่าสัญญาณจากอุปกรณ์ตรวจรู้ความเร่ง ที่ได้จากการเคาะที่ระบบแขนกลที่ตำแหน่ง A และ B แล้วนำมากรองช่วงความถี่สูงออก โดยสัญญาณที่ได้จากแกน x และ y จะนำมาตรวจวิเคราะห์หาค่าความถี่ในช่วง 0 ถึง 125 Hz ต่อไป

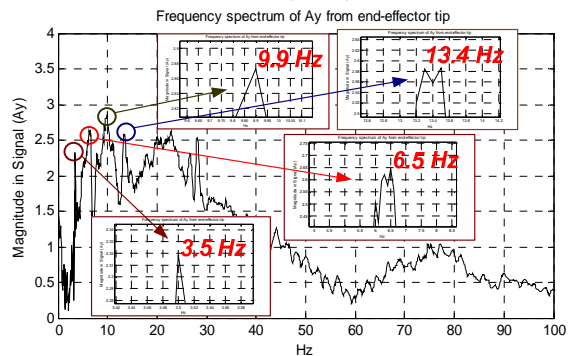
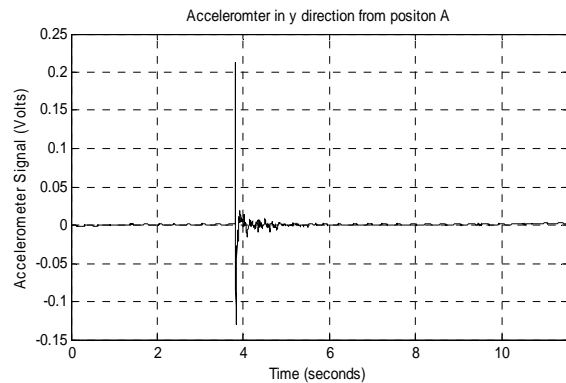


รูปที่ 3 แสดงตำแหน่งและทิศทางการเคาะระบบโครงสร้างแขนกล

เมื่อเคาะที่ตำแหน่ง A ดังรูป 3 โดยการเคาะตรงตามทิศแขนแกน ก้านต่อโยง 4 จะได้ค่าสัญญาณตามรูปที่ 4a,4b และ 5a,5b

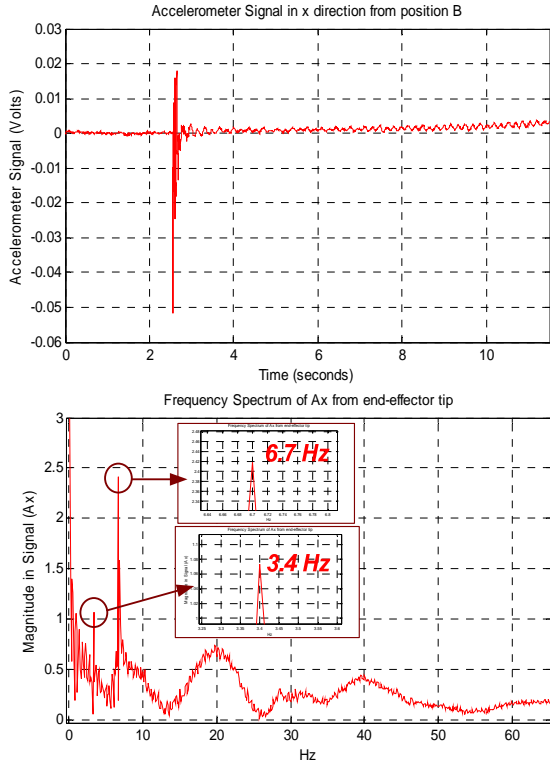


รูปที่ 4a,4b แสดงสัญญาณจากตัวตรวจรู้ความเร่งตามแกน x กับ ค่าสเปคตรัมที่ได้จากสัญญาณความถี่ตามแกน x เมื่อเคาะที่ A

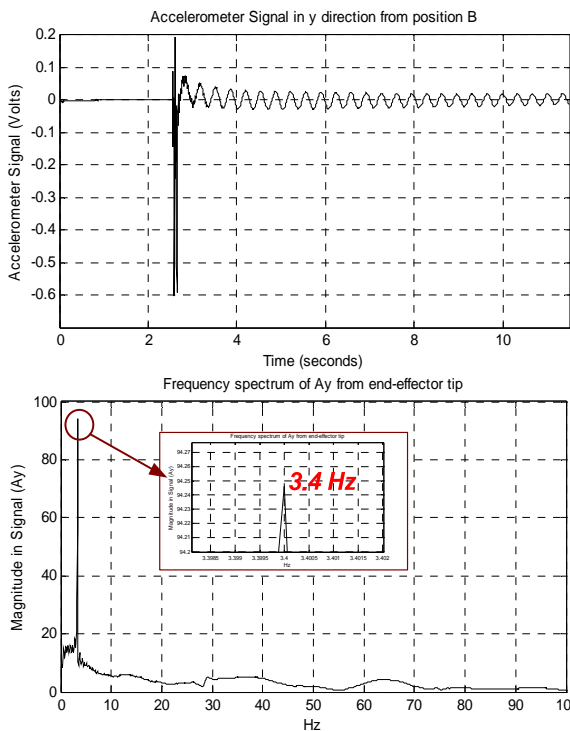


รูปที่ 5a, 5b แสดงสัญญาณจากตัวตรวจรู้ความเร่งตามแกน y ที่ผ่านกรองสัญญาณ กับ ค่าสเปคตรัมที่ได้จากสัญญาณความถี่ตามแกน y เมื่อเคาะที่ A

เมื่อเคาะขึ้นที่ตำแหน่ง B ดังรูป 3 โดยการเคาะตรงตามทิศแกนแกนก้านต่อโยง3 จะได้ค่าสัญญาณตามรูปที่ 6a,6b และ 7a,7b



รูปที่ 6a,6b แสดงสัญญาณจากตัวตรวจรู้ความเร่งตามแกน x ที่ผ่านกรองสัญญาณ กับ ค่าสเปคตรัมที่ได้จากสัญญาณความถี่ตามแกนx เมื่อเคาะที่ B



รูปที่ 7a, 7b แสดงสัญญาณจากตัวตรวจรู้ความเร่งตามแกน y ที่ผ่านกรองสัญญาณ กับ ค่าสเปคตรัมที่ได้จากสัญญาณความถี่ตามแกน y เมื่อเคาะที่ B

เมื่อพิจารณาตามรูป 4a-5b, จากผลการทดลองที่ได้เมื่อเคาะที่ตำแหน่ง A โดยเคาะตามแนวขนานกับแกน x จะพบว่า ขนาดแอมพลิจูดของสัญญาณความถี่ธรรมชาติของระบบแขนกลมีค่าสูงเกิดบนแกน x ของก้านต่อโยง 4 ที่ค่า 22 โดยประมาณบนความถี่เท่ากับ 6.6 Hz ในขณะที่ขนาดแอมพลิจูดบนแกน y นั้นอยู่ที่ประมาณ 2.4 ถึง 2.8 บนค่าความถี่ 3.5, 6.5, 9.9 และ 13.4 Hz ตามลำดับ ส่วนเมื่อพิจารณาตามรูป 6a-7b, เมื่อเคาะที่ตำแหน่ง B ซึ่งขนานตามแนวแกน y จะพบว่าขนาดแอมพลิจูดของสัญญาณความถี่ธรรมชาติบนแกน y ของก้านต่อโยง 4 ที่เกิดขึ้นมีค่าสูงประมาณ 95 อยู่ที่ 3.4 Hz เท่านั้น ในขณะที่บนแกน x มีค่าขนาดแอมพลิจูดเกิดขึ้นที่ 1.1 และ 2.4 บนความถี่ 3.4 กับ 6.7 Hz ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 6b

4. การวิเคราะห์ผลเทียบกับค่าการหาความถี่

เมื่อเปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากคำนวณในสมการพลศาสตร์ในหัวข้อที่ 2 กับค่าความถี่ธรรมชาติที่ได้จากการทดสอบแขนกลในหัวข้อที่ 3 เมื่อนำมาเทียบเคียงตามตารางที่ 1

ตารางที่ 1 เปรียบเทียบค่าความถี่ธรรมชาติที่โหมดต่างๆ ของแขนกล (หน่วย: Hz)

โหมดความถี่	ค่าความถี่ธรรมชาติ (Hz)	
	การคำนวณ	การทดสอบ
โหมดที่1	3.4	3.4-3.5
โหมดที่2	-	6.5
โหมดที่3	9.8	9.9

พบว่า จากการคำนวณเมื่อใช้ constraint ในลักษณะจุดเชื่อมต่อเป็น pin joint จะพบความถี่ในโหมดที่ 1 และ 3 มีค่าใกล้เคียงกับค่าจากการทดสอบมาก ในขณะที่

ที่ไม่ปรากฏค่าความถี่ในโหมดที่ 2 จากการคำนวณ ซึ่งพบในการทดสอบโดยมีค่าเท่ากับ 6.5 Hz

อย่างไรก็ตามเมื่อให้จุดเชื่อมต่อทั้งหมดเป็นแบบเชื่อมจะส่งผลให้ constraint ขององศาอิสระที่ตำแหน่งเชื่อมต่อ A, B และ C เปลี่ยนไปดังนี้คือ

$$q_{6/1} = q_{6/4} = q_6, \quad q_{15/2} = q_{15/3} = q_{15}$$

$$\text{และ } q_{9/3} = q_9$$

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_{12} = q_{16} = q_{17} = q_{18} = 0$$

ซึ่งเมื่อนำมาคำนวณหาความถี่ธรรมชาติจะได้ 11 ค่า ดังนี้

$$f_n = \begin{bmatrix} 6.8 \\ 13.5 \\ 25.6 \\ 83.6 \\ 403.7 \\ 431.0 \\ 1829.7 \\ 1937.7 \\ 2512.7 \\ 3517.2 \\ 4558.1 \end{bmatrix} \text{ Hz}$$

จะพบว่าความถี่แรกของชุดนี้มีค่าใกล้เคียงกับโหมดที่ 2 ที่หายไป

5. บทสรุป

จากขนาดแอมพลิจูดที่มีค่าสูงในช่วงค่าความถี่ต่ำที่พบได้นี้ อาจสรุปได้ว่าในช่วงความถี่ที่ครอบคลุมก้านต่อโยงของแขนหุ่นยนต์แบบยืดหยุ่นนี้จะมีเฉพาะก้านต่อโยงที่ 4 เท่านั้นที่มีการสั่น และการกำหนดลักษณะชนิดการยึดจับ (constraints or boundary condition) ในลักษณะจุดต่อแบบ pin joint ในแบบจำลองพลศาสตร์ที่เสนอในงานวิจัยนี้ให้ผลลัพธ์ค่าความถี่ธรรมชาติในโหมดต่าง ๆ นั้นมีค่าใกล้เคียงกับค่าความถี่ธรรมชาติที่วัดจากการสั่นที่องศาอิสระของแขนกลเดียวกัน ซึ่งแสดงว่าแบบจำลองทางพลศาสตร์ดังกล่าวมีความแม่นยำเพียงพอที่จะใช้ในการออกแบบตัวควบคุมต่อไป

6. เอกสารอ้างอิง

6.2 บทความจากเอกสารประกอบการประชุม (Proceedings)

- [1] Tsuneo, Y., Hiroki, M. and Koh, H. (1990). Modeling and control of a three degree of freedom manipulator with two flexible links, IEEE Conference on Decision and Control.
- [2] วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ และ กรรรมมันต์ ชูประเสริฐ (2554). การศึกษาแบบจำลองทางพลศาสตร์ของแขนกลที่มีความหยุ่นตัวสำหรับการเชื่อมระยะไกล, การประชุมเชิงวิชาการเครือข่ายวิศวกรรมเครื่องกลแห่งประเทศไทย ครั้งที่ 25, จังหวัดกระบี่

6.4 หนังสือ

- [1] Wolford, J.C. and Whaley, P.W. (1994). *Vibration of Mechanical and Structural Systems with microcomputer applications*, 2nd edition, ISBN: 0-06-501487-1, HarperCollins College Publishers.
- [2] Moallem, M., Patel, R.V. and Khorasani, K. (2000). *Flexible-link Robot Manipulators Control Techniques and Structural Design*, ISBN: 1-85233-333-2, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg.
- [3] Etter, D.M. (1996). *Engineering Problem Solving with Matlab*, Prentice Hall, Inc.