

ระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผันที่มีความคงทนสำหรับอากาศยานสี่ใบพัด Robust Inverse Dynamics Control for a Quadrotor

เรืออากาศโท วีระวัฒน์ ฝาระมี¹ และ วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ^{2*}

^{1,2} ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถ.พญาไท ปทุมวัน กรุงเทพมหานคร 10330.

* ติดต่อ: Veeravat.F@student.chula.ac.th¹, viboon.s@chula.ac.th², โทรศัพท์: 0-2218-6449, โทรสาร: 0-2218-6583

บทคัดย่อ

งานวิจัยนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการออกแบบระบบควบคุมเสถียรภาพทางการบินของอากาศยานสี่ใบพัด รูปแบบจำลองพลศาสตร์ของอากาศยานสี่ใบพัดนั้นเป็นชุดของสมการไม่เชิงเส้น มีตัวขับเคลื่อนน้อยกว่าองศาอิสระ และไม่สามารถหารูปแบบจำลองพลศาสตร์ได้อย่างแม่นยำ เนื่องจากมีตัวแปรที่ไม่สามารถระบุได้ และในการปฏิบัติงานจริงมีสิ่งรบกวนระบบและสภาพแวดล้อมเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงเน้นไปที่การออกแบบระบบควบคุมสำหรับอากาศยานสี่ใบพัดเพื่อจัดการกับผลกระทบดังกล่าว โดยพิจารณาแบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผันที่มีความคงทนมาใช้ในการควบคุมเสถียรภาพทางการบินของอากาศยานสี่ใบพัดให้อยู่ในสภาวะสมดุล ทำการทดลองระบบควบคุมทั้งหมดโดยการจำลองระบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ และทำการศึกษาประสิทธิภาพในการควบคุมระหว่าง ระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผัน กับ ระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผันที่มีความคงทน

คำหลัก: อากาศยานสี่ใบพัด / ระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผันที่มีความคงทน / ระบบหลายอินพุตและหลายเอาต์พุต / ระบบที่มีตัวขับเคลื่อนน้อยกว่าองศาอิสระ / การควบคุมแบบสไลด์ดิ้ง

Abstract

This study is concerned with the design of Robust Attitude Stabilization of the quadrotor. Because of quadrotor's dynamics model is nonlinear and under actuated plant, and it is difficult to obtain an accurate dynamics model due to uncertainties. In practice, there are always disturbances and environmental changes. Therefore this research places great emphasis on the design of controller that capable enough to overcome the disturbance. The Robust Inverse Dynamics control is studied in detail to meet the specification of the stabilization. Experiments by simulated and study efficient controllers between Inverse Dynamics control and Robust Inverse Dynamics control with sliding mode control.

Keywords: Quadrotor / Robust Inverse Dynamics control / Multiple Input Multiple Output / Under actuated System / Sliding mode control

1. บทนำ

อากาศยานไร้คนขับ (Unmanned Aerial Vehicle, UAV) เป็นคำจำกัดความของเครื่องบินที่ปราศจากคนบังคับอยู่ในเครื่อง ได้รับความนิยมนมาก ในการนำไปใช้งานในด้านต่างๆ เช่น กิจการพลเรือน, กิจการทหาร โดยมีภารกิจได้แก่ การสำรวจไฟฟ้า, การรายงานสภาพแวดล้อมที่มนุษย์เข้าไม่ถึง, การรายงานสภาพการจราจร, การถ่ายภาพทางอากาศ, ภารกิจค้นหา และช่วยเหลือ เป็นต้น

อากาศยานไร้คนขับ แบ่งออกเป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ คือ อากาศยานปีกตรึง (Fixed Wing) [6] และ อากาศยานปีกหมุน (Rotary wing) โดยอากาศยานสี่ใบพัดจัดอยู่ในกลุ่มอากาศยานปีกหมุน เนื่องจากมีคุณสมบัติหลายประการที่คล้ายคลึงกัน

อากาศยานสี่ใบพัดถูกออกแบบมาเพื่อลดความซับซ้อนของอุปกรณ์ทางกล (Mechanical Part) ต่างจากเฮลิคอปเตอร์ซึ่งมีอุปกรณ์ทางกลมากมาย ลักษณะโครงสร้างของอากาศยานสี่ใบพัดจะประกอบด้วยใบพัดที่หมุนสวนทิศทางกันอยู่ละ 1 คู่ เพื่อสร้างแรงบิดหักล้างกันในสภาวะบินรักษาระดับ โดยแต่ละคู่วางตัวตั้งฉากกัน ดังรูปที่ 1

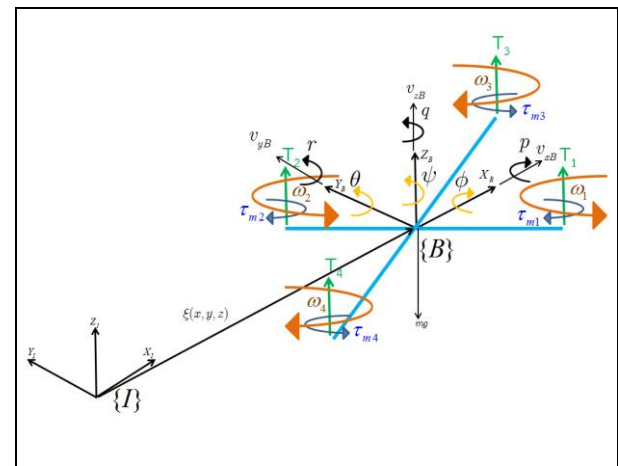
โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

- $\{I\}$ คือ เฟรมอ้างอิง (x_I, y_I, z_I)
- $\{B\}$ คือ เฟรมลำตัวอากาศยาน (x_B, y_B, z_B)
- ξ คือ ตำแหน่งพิกัดในแนวเคลื่อนตัว (x, y, z)
- τ_{mi} คือ แรงบิดจากโรเตอร์ทั้ง 4 ชุด $i = 1, 2, 3, 4$
- ω_i คือ ความเร็วเชิงมุมของโรเตอร์แต่ละชุด $i = 1, 2, 3, 4$
- T_i คือ แรงผลักของโรเตอร์แต่ละชุด $i = 1, 2, 3, 4$
- ϕ, θ, ψ คือ มุมที่ใช้ในการอธิบายการเรียงตัวของอากาศยานหรือมุมออยเลอร์ (Euler Angle)
- p, q, r คือ ความเร็วในการเคลื่อนที่เชิงมุมของอากาศยานตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ
- x, y, z คือ ตำแหน่งเชิงเส้นตามแนวแกน x, y, z
- v_{xB}, v_{yB}, v_{zB} คือ ความเร็วในการเคลื่อนที่เชิงเส้นของอากาศยาน ตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ

การเคลื่อนที่ของอากาศยานสี่ใบพัดเกิดจากการเปลี่ยนแปลงแรงยกที่เกิดจากการปรับเปลี่ยนความเร็วเชิงมุมโรเตอร์ทั้ง 4 ชุด การควบคุมทิศทางการบินและการเคลื่อนที่คล้ายอากาศยานทั่วไป ได้แก่ การเคลื่อนที่แบบเลื่อนตัวตามแนวแกน x, y, z และการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกน x, y, z ทำทางการบินของอากาศยานสี่ใบพัด จะบอกเป็นมุมหมุนรอบแกนทั้ง 3 แกน คือ มุมการหมุนรอบแกน x เรียกว่า มุมโรล (Roll) มุมการหมุนรอบแกน y เรียกว่ามุมพิทช์ (Pitch) มุมการหมุนรอบแกน z เรียกว่า มุมยอร์ (Yaw)

ในการออกแบบระบบควบคุมอากาศยานสี่ใบพัดเน้นไปที่การออกแบบระบบควบคุมเสถียรภาพทางการบินของอากาศยานสี่ใบพัดให้อยู่ในสภาวะสมดุลเนื่องจากระบบของอากาศยานสี่ใบพัดเป็นชุดของสมการไม่เชิงเส้น และเป็นระบบควบคุมหลายตัวแปร ดังนั้นจึงพิจารณาการควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผัน (Inverse Dynamics Control) [4] มาใช้ในการควบคุม

แต่เนื่องจากการหารูปแบบจำลองพลศาสตร์ของระบบที่ถูกต้องและแม่นยำทำได้ลำบาก ในการปฏิบัติงานจริงมีสิ่งรบกวนระบบและสภาพแวดล้อมเปลี่ยนแปลงตลอดเวลา เพื่อให้การควบคุมมีความคงทนต่อสิ่งรบกวนและมีประสิทธิภาพที่ดียิ่งขึ้น จึงได้นำการควบคุมแบบสไลด์ดิง (Sliding Mode Control) มาใช้ในการควบคุมและทำการทดลองระบบควบคุมทั้งหมดโดยการจำลองระบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์



รูปที่ 1 ลักษณะโครงสร้างและแรงที่กระทำของอากาศยานสี่ใบพัด

2. รูปแบบจำลองพลศาสตร์ของอากาศยานสี่ใบพัด

กำหนดให้

$$\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T \in SO3, \nu_B = [p \ q \ r]^T \in R^3$$

$$\xi = [x \ y \ z]^T \in R^3, V_B = [v_{xB} \ v_{yB} \ v_{zB}]^T \in R^3, G = [\eta]$$

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

η คือ การเรียงตัวของอากาศยานสี่ใบพัดเทียบกับเฟรมอ้างอิง

ξ คือ ตำแหน่งเชิงเส้นของอากาศยานสี่ใบพัดเทียบกับเฟรมอ้างอิง

V_B คือ เวกเตอร์ความเร็วเชิงเส้นของอากาศยานเทียบกับเฟรมลำตัวอากาศยาน

ν_B คือ เวกเตอร์ความเร็วเชิงมุมของอากาศยานเทียบกับเฟรมลำตัวอากาศยาน

G คือ พิกัดทั่วไปของอากาศยานสี่ใบพัด

เมทริกซ์การหมุนพิจารณาการหมุนจากเฟรมลำตัวอากาศยานสู่เฟรมอ้างอิง [4], [5] คือ

$$R_{BtoI} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\theta + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\theta + c\psi s\theta c\phi \\ s\psi c\theta & c\psi c\theta + s\psi s\theta s\phi & -c\psi s\theta + s\psi s\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (1)$$

เมทริกซ์การหมุนพิจารณาการหมุนจากเฟรมอ้างอิงสู่เฟรมลำตัวอากาศยาน [4], [5] คือ

$$R_{ItoB} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & s\psi c\theta & -s\theta \\ -s\psi c\theta + c\psi s\theta s\phi & c\psi c\theta + s\psi s\theta s\phi & c\theta c\phi \\ s\psi s\theta + c\psi s\theta c\phi & -c\psi s\theta + s\psi s\theta c\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \quad (2)$$

กำหนดให้ $sx = \sin(x)$ และ $cx = \cos(x)$

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วเชิงมุมของลำตัวอากาศยานกับความเร็วเชิงมุมของพิกัดทั่วไป [6] คือ

$$\nu_B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = W_n \dot{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -s\theta \\ 0 & c\phi & c\theta s\phi \\ 0 & -s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (3)$$

2.1 แรงบิดที่กระทำกับลำตัวอากาศยานสี่ใบพัด [5]

2.1.1 แรงบิดเนื่องจากแรงผลักของโรเตอร์

$$\tau_{Th} = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l((-f_1 - f_4) + (f_2 + f_3)) \\ l((-f_1 - f_3) + (f_2 + f_4)) \\ -\tau_{m1} - \tau_{m2} + \tau_{m3} + \tau_{m4} \end{bmatrix} \quad (4)$$

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

τ_B คือ แรงบิดทั้งหมดที่กระทำกับลำตัวอากาศยาน

τ_{mi} คือ แรงบิดมีทิศตรงข้ามกับทิศทางการหมุนของโรเตอร์แต่ละชุด $i = 1, 2, 3, 4$

τ_x, τ_y, τ_z คือ แรงบิดที่กระทำกับลำตัวอากาศยานทำให้อากาศยานหมุนตามแนวแกน x, y, z

l แทน ระยะห่างระหว่างจุดกึ่งกลางโรเตอร์ถึงจุดศูนย์ถ่วงของอากาศยาน

2.1.2 แรงบิดเนื่องจากผลของไจโรสโคปิกโรเตอร์

$$\tau_{gyr} = \begin{bmatrix} I_r(\dot{\theta}c\phi + \dot{\psi}cs\theta s\phi)(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ I_r(\dot{\phi} - \dot{\psi}s\theta)(-\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

โดยตัวแปรมีความหมายดังนี้

I_r คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของโรเตอร์

2.1.3 แรงบิดจากการเปลี่ยนความเร็วเชิงมุมโรเตอร์

$$\tau_{ar} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_r(\dot{\omega}_1 + \dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_3 - \dot{\omega}_4) \end{bmatrix} \quad (6)$$

โดยตัวแปรมีความหมายดังนี้

$\dot{\omega}_i$ คือ อนุพันธ์ความเร็วเชิงมุมของโรเตอร์ $i = 1, 2, 3, 4$

2.1.4 แรงบิดจากแรงต้านในแนวนอนของใบพัด

$$\tau_H = h \begin{bmatrix} -\frac{v_{yB}}{|v_B|} \sum_{i=1}^4 H_i \\ \frac{v_{xB}}{|v_B|} \sum_{i=1}^4 H_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

โดยตัวแปรมีความหมายดังนี้

H_i แรงต้านในแนวนอนของใบพัด (Hub Force)

โดยที่ $i = 1, 2, 3, 4$

แรงบิดทั้งหมดที่กระทำกับอากาศยาน คือ

$$\tau_B = \tau_{Th} + \tau_{gyr} + \tau_{ar} + \tau_H \quad (8)$$

โดยที่ $\tau_B = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$ คือ แรงบิดที่กระทำตามแนวแกน x, y, z

สมมุติฐานในการคำนวณด้วยวิธีการลากรางจ์-ออยเลอร์ [4] มีดังต่อไปนี้

1. โครงสร้างของอากาศยานสี่ใบพัดมีความแข็ง
2. โครงสร้างมีลักษณะสมมาตรทุกทิศทาง
3. จุดศูนย์กลางถ่วงและจุดเริ่มต้นของเฟรมลำตัวอากาศยานอยู่ตำแหน่งเดียวกัน
4. ใบพัดทั้ง 4 ใบ สมมุติว่าเป็นวัตถุที่แข็ง

พลังงานจลน์ในการเคลื่อนตัว (Translational Kinetic Energy) ของอากาศยาน [6] คือ

$$T_{trans} = \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (9)$$

พลังงานจลน์ในการหมุน (Rotational Kinetic Energy) ของอากาศยาน [6] คือ

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \nu_B^T I \nu_B = \frac{1}{2} \eta_B^T W_n^T I W_n \eta_B \quad (10)$$

พลังงานศักย์ (Potential Energy) ของอากาศยาน [6] คือ

$$U = mgz \quad (11)$$

ในการหารูปแบบจำลองพลศาสตร์สามารถกระทำได้โดยใช้วิธีการลากรางจ์-ออยเลอร์ [3], [4] เมื่อได้สมการพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ของอากาศยานสี่ใบพัดแล้วสามารถหาลากรางเจียน (Lagrangian) และ สมการลากรางจ์ของระบบได้จากสมการ

$$\begin{aligned} L(G, \dot{G}) &= T_{trans} + T_{rot} - U \\ &= \frac{m}{2} \dot{\xi}^T \dot{\xi} + \frac{1}{2} \nu_B^T I \nu_B - mgz \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Gamma(T_B, \tau_B) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{G}} - \frac{\partial L}{\partial G} \quad (13)$$

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

L คือ Lagrangian ของระบบ

$\Gamma(T_B, \tau_B)$ คือ แรงและแรงบิดที่กระทำกับอากาศยาน การเคลื่อนที่ในการเคลื่อนตัว มีสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{trans}}{\partial \dot{G}} - \frac{\partial T_{trans}}{\partial G} = T_B \quad (14)$$

การเคลื่อนที่ในการหมุน มีสมการดังต่อไปนี้

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{G}} - \frac{\partial T_{rot}}{\partial G} = \tau_B \quad (15)$$

สมการการเคลื่อนที่ในการหมุน

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่คิดเฉพาะในส่วนการเปลี่ยนแปลงการหมุนหรือการเรียงตัว (orientation) สามารถเขียนได้ดังนี้

$$M(\eta) \ddot{\eta} + C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta} = \tau_B \quad (16)$$

$$\ddot{\eta} = M(\eta)^{-1} (\Gamma(\tau_B) - C(\eta, \dot{\eta}) \dot{\eta}) \quad (17)$$

โดยที่สมการที่ 16 เป็นรูปแบบทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ [4]

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

$C(\eta, \dot{\eta})$ คือ พจน์โคลิโอริสประกอบด้วยพจน์ ไจโรสโคปิกและพจน์แรงสู่ศูนย์กลาง

$M(\eta)$ คือ พจน์ของความเฉื่อย

I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} คือ โมเมนต์ของความเฉื่อยของอากาศยานตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ

$$M(\eta) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$m_{11} = I_{xx}$$

$$m_{12} = 0$$

$$m_{13} = -I_{xx} s\theta$$

$$m_{21} = 0$$

$$m_{22} = I_{yy} c^2\phi + I_{zz} s^2\phi$$

$$m_{23} = (I_{yy} - I_{zz}) c\phi s\phi c\theta$$

$$m_{33} = -I_{xx} s\theta$$

$$m_{32} = (I_{yy} - I_{zz}) c\phi s\phi c\theta$$

$$m_{33} = I_{xx} s^2\theta + I_{yy} s^2\phi c^2\theta + I_{zz} c^2\phi c^2\theta$$

$$C(\eta, \dot{\eta}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$c_{11} = 0$$

$$\begin{aligned} c_{12} &= (I_{yy} - I_{zz})(\dot{\theta} c\phi s\phi + \dot{\psi} s^2\phi c\theta) \\ &\quad + (I_{zz} - I_{yy})\dot{\psi} c^2\phi c\theta - I_{xx} \dot{\psi} c\theta \end{aligned}$$

$$c_{13} = (I_{zz} - I_{yy})\dot{\psi} c\phi s\phi c^2\theta$$

$$c_{22} = (I_{zz} - I_{yy})\dot{\phi} c\phi s\phi$$

$$\begin{aligned} c_{23} &= -I_{xx} \dot{\psi} s\theta c\theta + I_{yy} \dot{\psi} s^2\phi s\theta c\theta \\ &\quad + I_{zz} \dot{\psi} c^2\phi s\theta c\theta \end{aligned}$$

$$c_{31} = (I_{yy} - I_{zz})\dot{\psi} c^2\theta s\phi c\phi - I_{xx} \dot{\theta} c\theta$$

$$\begin{aligned} c_{32} &= (I_{zz} - I_{yy})(\dot{\theta} c\phi s\phi s\theta + \dot{\psi} s^2\phi c\theta) \\ &\quad + (I_{yy} - I_{zz})\dot{\phi} c^2\phi c\theta + I_{xx} \dot{\psi} s\theta c\theta \\ &\quad - I_{yy} \dot{\psi} s^2\phi s\theta c\theta - I_{zz} \dot{\psi} c^2\phi s\theta c\theta \end{aligned}$$

$$c_{33} = (I_{yy} - I_{zz})\dot{\phi}c\phi s\phi c^2\theta - I_{yy}\dot{\theta}s^2\phi s\theta c\theta - I_{zz}\dot{\theta}c^2\phi c\theta s\theta + I_{xx}\dot{\theta}c\theta s\theta$$

กำหนดให้ $sx = \sin(x)$ และ $cx = \cos(x)$

ภายใต้เงื่อนไข

$$-\pi/2 < \phi < \pi/2, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2, \quad -\pi < \psi < \pi$$

3. การออกแบบระบบควบคุม

3.1 พิจารณา Internal Dynamics

ระบบควบคุมพลศาสตร์ผกผัน โดยการควบคุมแบบใช้สัญญาณอินพุตและสัญญาณเอาต์พุตมาเพื่อทำให้ตัวควบคุมแบบปิดเป็นแบบเชิง ถูกนำมาใช้ในการประมาณระบบในรูปแบบที่เป็นเชิงเส้น จึงจำเป็นต้องพิจารณาเสถียรภาพของ Internal Dynamics กำหนดให้ เอาพุตและอินพุตของระบบคือ $y = [\phi \ \theta \ \psi \ \dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ และ $u = [\tau_\phi \ \tau_\theta \ \tau_\psi]^T$ จากสมการที่ 17 จัดรูปใหม่ $\dot{x} = f(x, u)$, $y = h(x)$ กำหนดให้

$$x_1 = \phi, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \psi, \quad \dot{x}_1 = \dot{\phi}, \quad \dot{x}_2 = \dot{\theta}, \quad \dot{x}_3 = \dot{\psi}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ f(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) + g(x_1, x_2, x_3)u_1 \\ f(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) + g(x_1, x_2, x_3)u_2 \\ f(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) + g(x_1, x_2, x_3)u_3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

ทำการหาอนุพันธ์เอาพุตของระบบเทียบกับเวลา จนกระทั่งเจออินพุต จะได้ว่า จำนวนลำดับอนุพันธ์ของเอาพุตทั้งหมด ($r = 9$) และ จำนวนลำดับทั้งหมดของสมการที่นำมาพิจารณา ($n = 9$) พบว่า $r=n$ ดังนั้นสมการที่นำมาพิจารณาในการออกแบบระบบควบคุม ไม่มี Internal Dynamics ทำให้ระบบควบคุมมีลักษณะคล้ายกับการควบคุมแบบใช้สัญญาณอินพุตอย่างเดียวเพื่อทำให้ระบบควบคุมแบบปิดเป็นแบบเชิงเส้น (input state feedback linearization) [1], [2] ซึ่งการควบคุมแบบ

พลศาสตร์ผกผัน (inverse dynamic) จัดอยู่ในการควบคุมแบบนี้

3.2 ระบบควบคุมพลศาสตร์ผกผัน

จากรูปที่ 2 แสดงแผนผังของการควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผัน วิธีการนี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานว่าต้องการหาสัญญาณควบคุม τ โดยมีรูปแบบดังนี้คือ

$$\tau = M(\eta)y + C(\eta, \dot{\eta})\dot{\eta} \quad (22)$$

แทนค่าสัญญาณควบคุมนี้ลงในสมการที่ 16 จะได้ว่า

$$\ddot{\eta} = y \quad (23)$$

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

y คือ เวกเตอร์ตัวแปรของสัญญาณควบคุมใหม่ที่ต้องการหา

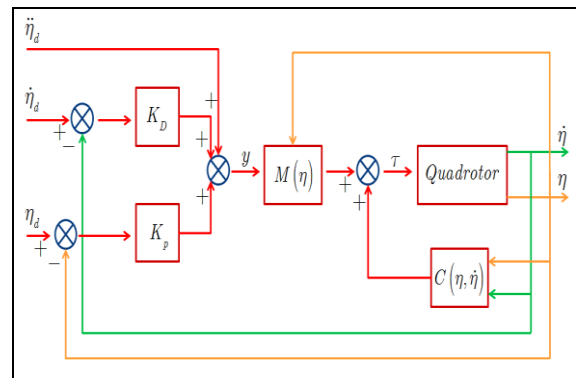
กำหนดให้ y เท่ากับ

$$y = \ddot{\eta}_d + K_p(\eta_d - \eta) + K_D(\dot{\eta}_d - \dot{\eta}) \quad (24)$$

เมื่อ $\ddot{\eta}_d, \dot{\eta}_d, \eta_d$ คือ ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งที่กำหนด K_p, K_D คือ ค่าเกนของตัวควบคุม ดังนั้นสมการที่ 24 สามารถเขียนอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบต่อเนื่องได้เท่ากับ

$$\ddot{\eta} + K_D\dot{\eta} + K_p\eta = 0 \quad (25)$$

เมื่อ $\eta = \eta_d - \eta$ และ $\dot{\eta}, \ddot{\eta}$ คือ ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่ที่ผิดพลาด



รูปที่ 2 แผนผังการควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผัน

3.3 การควบคุมแบบสไลด์ดิง

จากรูปที่ 3 แสดงแผนผังการควบคุมแบบสไลด์ดิง โดยนำมาใช้งานร่วมกับการควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผัน เพื่อทำให้ระบบควบคุมคงทนยิ่งขึ้น หลักการของวิธีการควบคุมแบบสไลด์ดิง (Sliding Mode Control) [1],[2]

คือ การควบคุมตัวสถานะของค่าผิดพลาดให้เคลื่อนที่เข้าสู่ระนาบสไลด์ดิง (Sliding Plane) และควบคุมให้เคลื่อนที่อยู่บนระนาบสไลด์ดิงในทิศทางกรู๋เข้าสู่ศูนย์ ดังรูปที่ 4 โดยระบบสมการของระนาบสไลด์ดิง คือ

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + c \right)^{n-1} e = 0 \quad (26)$$

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

$s(x, t)$ คือ ระนาบสไลด์ดิง

n คือ ลำดับสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบ

e คือ เวกเตอร์ของค่าความผิดพลาดของระบบ

มีค่าเท่ากับ $e = \eta_d - \eta$ เมื่อ η, η_d คือ เวกเตอร์สถานะ

อ้างอิงและเวกเตอร์สถานะ

เนื่องจากรูปแบบจำลองพลศาสตร์ของอากาศยานสี่ใบพัดเป็นระบบอนุพันธ์ลำดับที่สอง ดังนั้น

$$s(x, t) = \left(\frac{d}{dt} + c \right)^{n-1} e = 0$$

$$= \dot{e} + ce = 0 \quad (27)$$

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนทั้ง 3 แกน สามารถเขียนสมการของระนาบสไลด์ดิงได้ดังนี้

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = R_1 \dot{e} + R_2 e = 0 \quad (28)$$

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix}$$

ในการพิจารณาความเสถียรภาพของระบบ สามารถใช้ทฤษฎีเสถียรภาพไลปูนอฟ (Lyapunov Stability Theory) [2] มาใช้ในการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุม โดยกำหนดให้ไลปูนอฟฟังก์ชันคือ

$$V(s) = \frac{1}{2} s^2 \quad (29)$$

สมการอนุพันธ์ของไลปูนอฟฟังก์ชันเทียบกับเวลา คือ

$$\dot{V} = s \dot{s} \leq -\sigma |s| \quad (30) \quad (30)$$

โดยตัวแปรมีความหมายดังนี้

σ มีค่าเป็นค่าคงที่บวก

เมื่อพิจารณาการทำงานในขอบเขตของทฤษฎีเสถียรภาพของไลปูนอฟแล้ว กำหนดให้

$$\dot{V} = -s^T K s \eta \quad (31)$$

จากสมการที่ 30 และ สมการที่ 31 จัดรูปแบบใหม่ จะได้

$$\dot{s} = -K s \eta \quad (32)$$

โดยตัวแปรมีความหมายดังนี้

K คือ อัตราขยายการสวิตช์ เป็นค่าแอมพลิจูดของฟังก์ชันแบบไม่ต่อเนื่อง

จากสมการอนุพันธ์ของระนาบสไลด์ดิง จะได้ว่า

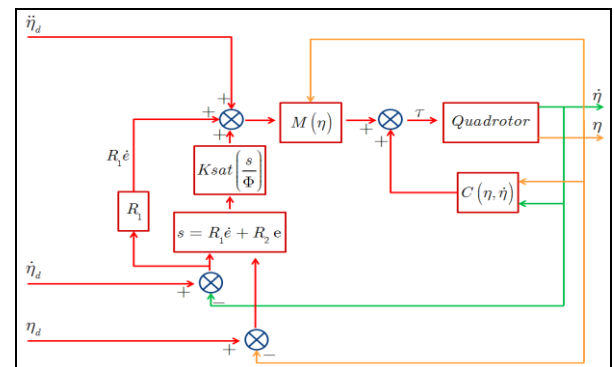
$$\begin{aligned} \dot{s} &= \ddot{e} + c\dot{e} \\ \dot{s} &= \ddot{\eta}_d - \ddot{\eta} + c\dot{e} \\ &= \ddot{\eta}_d - M(\eta)^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})) + c\dot{e} \\ &= \ddot{\eta}_d - M(\eta)^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})) + c\dot{e} \end{aligned} \quad (33)$$

จากสมการที่ 32 แทนในสมการที่ 33 จะได้

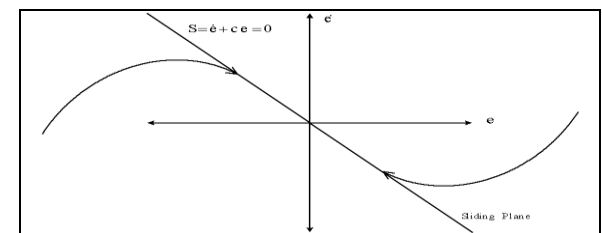
$$-K s \eta \quad \dot{s} = \ddot{\eta}_d - M(\eta)^{-1}(\tau - C(\eta, \dot{\eta})) + c\dot{e} \quad (34)$$

จัดรูปสมการข้างต้น จะได้สมการกฎการควบคุมดังนี้

$$\tau = M(\eta)(c\dot{e} + \ddot{\eta}_d) + C(\eta, \dot{\eta}) + M(\eta)K s \eta \quad (35)$$



รูปที่ 3 แผนผังการควบคุมแบบสไลด์ดิง



รูปที่ 4 การเคลื่อนที่เข้าสู่ระนาบสไลด์ดิง

3.3.1 การลดผลของแซทเทอริ่ง

เนื่องจากตัวควบคุมสวิตช์ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบไม่ต่อเนื่องส่งผลให้เกิดแซทเทอริ่ง (Chattering) [2] เพื่อลดผลดังกล่าวจึงควบคุมการทำงานภายใต้ขอบเขตของฟังก์ชันอิมพัลส์ โดยพิจารณาให้ตัวสถานะของระบบบนระนาบสไลด์ดิงภายในขอบเขตการทำงาน

กำหนดให้ค่าขอบเขตของระนาบสไลด์ดิง [2] คือ

$$B(t) = \{x, |s(x, t)| \leq \Phi\} \quad (36)$$

โดยตัวแปรมีความหมายดังนี้

Φ คือ ค่าความกว้างของค่าขอบเขตระนาบสไลด์ดิง

กำหนดให้ฟังก์ชันอิมิตัว คือ

$$\text{sat}\left(\frac{s}{\Phi}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } s > \Phi \\ \frac{s}{\Phi} & \text{if } |s| \leq \Phi, \Phi > 0 \\ -1 & \text{if } s < -\Phi \end{cases}$$

กำหนดให้ขอบเขตค่าผิดพลาดเชิงตำแหน่ง คือ

$$e(t) = \varepsilon \leq \left| \frac{\Phi}{s} \right| \quad (37)$$

จากสมการที่ 35 สามารถเขียนสมการกฎการควบคุมด้วยวิธีการควบคุมแบบสไลด์ดิง ดังนี้

$$\tau = M(\eta)(c\dot{e} + \ddot{\eta}_d) + C(\eta, \dot{\eta}) + M(\eta)K\text{sat}\left(\frac{s}{\Phi}\right) \quad (38)$$

4. การทดลอง

4.1 การกำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่อ้างอิง

การกำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่ในการทดลองได้ออกแบบลักษณะการเคลื่อนที่ โดยกำหนดมุมเริ่มต้นให้มุมการหมุนทั้ง 3 มุมแล้วเคลื่อนที่กลับเข้าสู่จุดสมดุลเนื่องจากตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งในแต่ละช่วงเวลามีความสัมพันธ์กัน ดังนั้น เราสามารถสร้างสมการการเคลื่อนที่อ้างอิง ได้ดังต่อไปนี้

$$q_i t = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c \frac{t - t_c}{2} & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases} \quad (39)$$

โดยที่สมการความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมอ้างอิง สามารถหาได้จากอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งและสองของสมการ

โดยแต่ละตัวแปรมีความหมายดังนี้

q_i คือ ตำแหน่งมุมเริ่มต้น ($q_i = \phi_i, \theta_i, \psi_i \text{ rad}$)

q_f คือ ตำแหน่งมุมสุดท้าย ($q_f = \phi_f, \theta_f, \psi_f \text{ rad}$)

t_f คือ ช่วงเวลาทั้งหมดที่กำหนดขึ้น (sec)

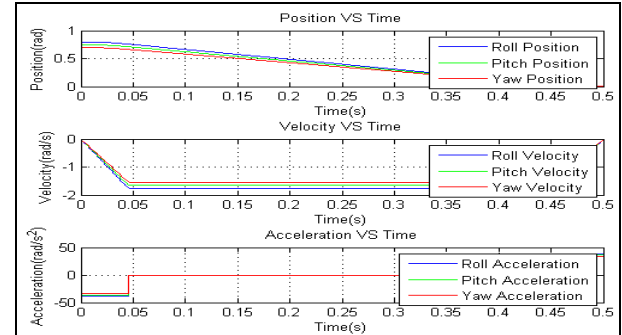
t_c คือ ช่วงเวลาที่ใช้ในการเร่งความเร็ว (sec)

ตัวแปรที่ใช้ในการกำหนดเส้นทางการเคลื่อนที่ คือ

$$\phi_i = 0.80 \text{ rad.}, \phi_f = 0 \text{ rad.}, \theta_i = 0.75 \text{ rad.}, \theta_f = 0 \text{ rad.}$$

$$\psi_i = 0.70 \text{ rad.}, \psi_f = 0 \text{ rad.}, t_i = 0 \text{ s.}, t_f = 0.5 \text{ s.}$$

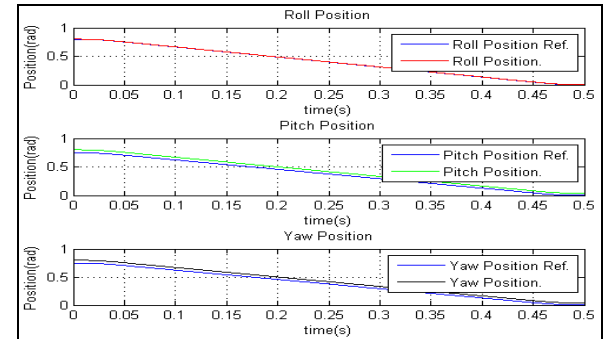
นำไปแทนในสมการที่ 39 จะได้ความสัมพันธ์ดังรูปที่ 5



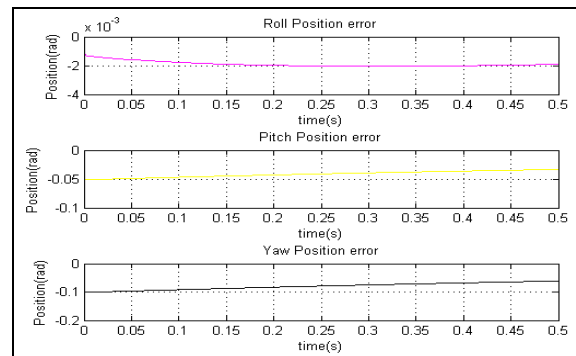
รูปที่ 5 แสดงความสัมพันธ์ตำแหน่งของมุม, ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของมุมการหมุนทั้ง 3 มุม

5. ผลการทดลอง

จากกราฟรูปที่ 6 และ 7 แสดงผลของระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผัน จะเห็นได้ว่าเส้นกราฟของความผิดพลาดของตำแหน่งมุมการหมุนทั้ง 3 มุมกับเวลา มีค่าความผิดพลาดอยู่มาก ดังรูปที่ 7

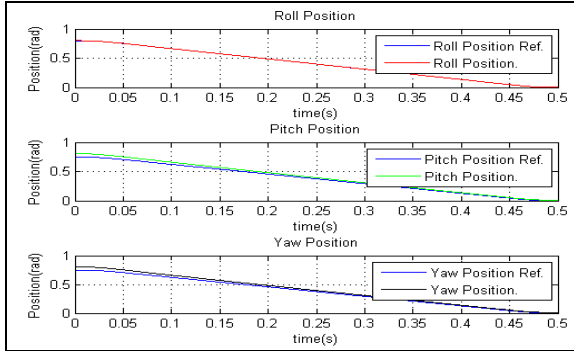


รูปที่ 6 แสดงตำแหน่งอ้างอิงของมุมและผลลัพธ์ของตำแหน่งมุมการหมุนทั้ง 3 มุมกับเวลา

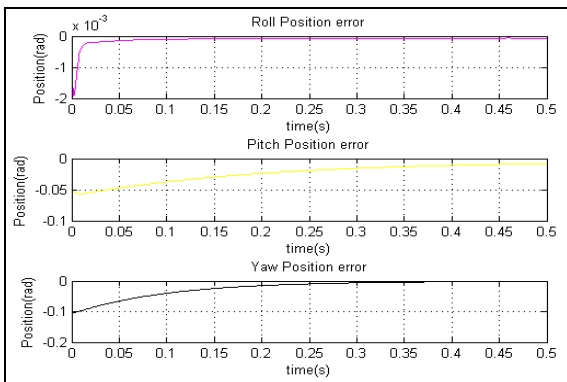


รูปที่ 7 แสดงความผิดพลาดเทียบกับตำแหน่งอ้างอิงของมุมการหมุนทั้ง 3 มุมกับเวลา

จากกราฟรูปที่ 8 และ 9 แสดงผลของระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผันที่มีความคงทนโดยทำงานร่วมกับการควบคุมแบบสไลด์ดิ้ง จะเห็นได้ว่าเส้นกราฟของความผิดพลาดของตำแหน่งมุมการหมุนทั้ง 3 มุมกับเวลา มีความผิดพลาดลดลงมากขึ้น ดังรูปที่ 9



รูปที่ 8 แสดงตำแหน่งอ้างอิงของมุมและผลลัพธ์ของตำแหน่งมุมการหมุนทั้ง 3 มุมกับเวลา



รูปที่ 9 แสดงความผิดพลาดเทียบกับตำแหน่งอ้างอิงของมุมการหมุนทั้ง 3 มุมกับเวลา

6. สรุปผลการทดลอง

งานวิจัยนี้ได้ทำการศึกษารูปแบบจำลองพลศาสตร์ของอากาศยานสี่ใบพัด โดยได้ใช้หลักการของลากรางจ์-ออยเลอร์ ทำการออกแบบระบบควบคุมโดยพิจารณาการควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผันที่มีความคงทนมาใช้ในการควบคุมโดยทำงานร่วมกับการควบคุมแบบสไลด์ดิ้ง ทดลองระบบควบคุมโดยการจำลองระบบด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ จากผลการทดลองพบว่าระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผันที่มีความคงทนมีประสิทธิภาพในการลดความผิดพลาดได้ดีกว่าระบบควบคุมแบบพลศาสตร์ผกผัน โดยค่าความผิดพลาดของตำแหน่งมุมการหมุนทั้ง 3 มุม อยู่ในขอบเขตช่วงที่

ยอมรับได้ และในขั้นตอนต่อไปจะดำเนินการทดลองระบบควบคุมที่ได้ศึกษากับระบบอากาศยานสี่ใบพัดจริง

7. กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากโครงการศูนย์ระดับภูมิภาคเทคโนโลยีหุ่นยนต์ภายใต้โครงการเพิ่มศักยภาพด้านวิศวกรรมศาสตร์สาขาเพื่อพัฒนาและสร้างความเป็นเลิศด้านวิศวกรรมศาสตร์ในระดับภูมิภาคและการเรียนการสอนไปสู่ระดับโลก ในแผนพัฒนาวิชาการจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (จุฬาฯ 100 ปี)

8. เอกสารอ้างอิง

- [1] Abhijit Das, Frank L.Lewis and Kamesh Subbarao (2011). Sliding Mode Approach to Control Quadrotor Using Dynamic Inversion, Automation and Robotics Research Institute, The University of Texas Arlington.
- [2] Jean-Jacques E. Slotine, Weiping Li. (1991). Applied Nonlinear Control, ISBN: 0-13-040049-1, Prentice-Hall, Inc.
- [3] วิบูลย์ แสงวีระพันธุ์ศิริ (2548). การควบคุมระบบพลศาสตร์ (Control of Dynamic Systems), พิมพ์ครั้งที่ 2, สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- [4] Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, and Giuseppe Oriolo. (2009). Robotics Modelling, Planning and Control, 1st edition, ISBN: 978-1-84628-641-4, Springer-Verlag London Limited.
- [5] Thorhallur Tomas Buchholz and Dagur Gretarsson (2009). Construction of a Four Rotor Helicopter Control System, Master's Thesis, Technical University of Denmark .
- [6] Pero Castillo, Rogelio Lozano and Alejandro E. Dzul (2005). Modelling and Control of Mini-Flying, ISBN: 185233957, Springer-Verlag London.