

## การวิเคราะห์การนำความร้อนที่สถานะคงตัวสำหรับรูปร่างสองมิติ ด้วยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

### Analysis of steady-state heat conduction for two-dimensional solids by using a finite difference method

ภาสกร เวสสะโกศล

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ อำเภอหาดใหญ่ จังหวัดสงขลา 90110

E-mail: [passakorn.vessakosol@gmail.com](mailto:passakorn.vessakosol@gmail.com) โทร. 074 287035-6

#### บทคัดย่อ

บทความนี้อธิบายการวิเคราะห์ปัญหาการนำความร้อนในสองมิติที่สถานะคงตัว ด้วยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แบบดั้งเดิมซึ่งใช้กริดที่มีโครงสร้างเป็นกริดตั้งฉากที่ขนานกับแกน  $x$  และ  $y$  กริดในแกน  $x$  และแกน  $y$  เป็นกริดที่มีขนาดสม่ำเสมอ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สามารถสร้างสมการเชิงเส้นกับจุดต่อภายในรูปร่างได้โดยง่าย แต่อาจมีความยุ่งยากเล็กน้อยสำหรับจุดต่อใกล้กับขอบเขตปัญหาที่มีรูปร่างโค้ง ในบทความนี้เลือกใช้เงื่อนไขขอบเขตชนิดอุณหภูมิคงที่และฟลักซ์ความร้อนเป็นศูนย์เท่านั้น ปัญหาทั้งหมดที่นำมาพิจารณาทั้งหมด 3 ปัญหา ในที่สุดคำตอบของวิธีการที่นำเสนอในบทความนี้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับคำตอบจากวิธีเชิงวิเคราะห์ วิธีไฟไนต์วอลุ่มสำหรับกริดไร้ระเบียบและวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

**คำหลัก:** วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์, การนำความร้อน, สถานะคงตัว

#### Abstract

This paper describes the analysis of two-dimensional heat conduction problems at steady state by using the traditional finite difference method. The Cartesian grid system is employed. The finite difference method can easily generate the system of algebraic equations for internal nodes but it can face some difficulties for the boundary nodes especially when the boundary is curved. Two types of boundary conditions are presented in this paper such as the constant temperature and adiabatic conditions. The assessment of present method is done by choosing three problems with curved and sloped boundaries. Finally, the comparison between the present solution and the solutions from other methods such as analytical method, unstructured finite volume method and the finite element method are shown.

**Keywords:** finite difference method, heat conduction, steady state.

#### 1. บทนำ

การศึกษาการนำความร้อนด้วย วิธีเชิงวิเคราะห์ เป็นสิ่งที่ทำได้เฉพาะปัญหาการนำความร้อน ที่มีรูปร่างอย่างง่าย และเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่ซับซ้อน ทำให้วิธีวิเคราะห์ไม่เป็นที่ยอมรับ ในการแก้สมการการนำความร้อน วิธีที่ได้สะดวกยิ่งกว่าคือ วิธีเชิงตัวเลขซึ่งให้คำตอบที่ตำแหน่งต่างๆภายในปัญหาด้วยการประมาณค่า วิธีเชิงตัวเลขซึ่งเป็นที่รู้จักกันอย่างกว้างขวางได้แก่ วิธีไฟไนต์

ดิฟเฟอเรนซ์ [1] วิธีไฟไนต์วอลุ่ม [2] วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ [4] วิธีบาวนด์รีเอลิเมนต์ [5] เป็นต้น

วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ ซึ่งถือเป็นวิธีเชิงตัวเลขที่เก่าแก่ที่สุด และถูกละเลยไปเป็นเวลานานเนื่องจาก วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถหาคำตอบให้ กับปัญหาที่มีรูปร่างใดก็ได้ด้วยการใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยม หรือเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมซึ่งสามารถจัดวางรูปร่าง อย่างไรก็ตามในโดเมนของปัญหา วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้รับความนิยม

อย่างมากทำให้วิธีนี้ถูกสร้างเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ สำเร็จรูปอย่างมากมาย ปัญหาการนำความร้อนหลาย เงื่อนไขขอบเขตสามารถหาคำตอบได้ด้วย วิธีไฟไนต์เอลิ-เมนต์ วิธีที่นำเสนอในบทความนี้คือ วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอ-เรนซ์ซึ่งมีข้อดีบางอย่างเช่น วิธีนี้สามารถสร้างเป็น โปรแกรมได้ง่ายกว่า เนื่องจากหลักการที่ใช้เป็นสิ่งที่ เข้าใจได้ง่าย วิธีนี้ไม่จำเป็นต้องใช้เครื่องมือสร้างโครงข่าย อัตโนมติ วัตถุ ประสงค์ของบทความนี้คือ นำเสนอวิธี สร้างสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ พัฒนาโปรแกรม คอมพิวเตอร์ด้วยภาษาฟอร์แทรน 90 เพื่อหาสนามของ อุณหภูมิภายในปัญหาที่มีขอบเขตเอียง หรือมีลักษณะโค้ง เมื่อเปรียบเทียบกับเส้นแนวของกริดคาร์ทีเซียน

เนื้อหาที่นำเสนอในบทความนี้ ประกอบด้วย หัวข้อที่ 2 กล่าวถึงสมการและเงื่อนไขขอบเขตสำหรับ ปัญหาการนำความร้อน หัวข้อที่ 3 อธิบายหลักการ พื้นฐานของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ หัวข้อที่ 4 เปรียบเทียบผลการคำนวณจากวิธีที่ใช้กับ ผลการคำนวณ จากวิธีอื่นๆ และหัวข้อสุดท้ายกล่าวถึงข้อสรุปที่ได้จาก การศึกษารวมถึงแนวทางการพัฒนาในอนาคต

## 2. ทฤษฎี

สมการสำหรับการนำความร้อนสองมิติ ภายใต้ สภาวะคงตัว (steady state) ผ่านวัตถุของแข็งมี คุณสมบัติเชิงความร้อนสม่ำเสมอสามารถอธิบายได้ด้วย

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{g}{k} = 0 \quad (1)$$

เมื่อ  $T$  คืออุณหภูมิภายในของแข็ง,  $(x, y)$  คือตำแหน่ง ของระบบพิกัดคาร์ทีเซียนสองมิติ,  $k$  คือสภาพการนำ ความร้อนของวัตถุ,  $g$  คืออัตราการผลิตความร้อนต่อ หนึ่งหน่วยปริมาตรของวัตถุ

การระบุเงื่อนไขขอบเขตสามารถทำได้ 3 รูปแบบ ดังนี้

ก) เงื่อนไขอุณหภูมิผิวคงที่

$$T = T_s \quad (2)$$

ข) เงื่อนไขฟลักซ์ความร้อนที่ผิว

$$q_s = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) \quad (3)$$

ค) เงื่อนไขการพาความร้อนที่ผิว

$$h(T - T_\infty) = -k \left( \frac{\partial T}{\partial x} n_x + \frac{\partial T}{\partial y} n_y \right) \quad (4)$$

เมื่อ  $T_s$  คืออุณหภูมิที่กำหนดให้กับผิวของวัตถุ,  $T_\infty$  คือ อุณหภูมิของของไหลที่ทำให้เกิดการพาความร้อน,  $q_s$  คือ ฟลักซ์ความร้อนที่กำหนดให้กับผิวของวัตถุ,  $h$  คือ สัมประสิทธิ์การพาความร้อน,  $(n_x, n_y)$  คือองค์ประกอบ ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งพุ่ง ออกจากพื้นผิวของวัตถุ

## 3. วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์คือ วิธีเชิงตัวเลขชนิดหนึ่ง ที่ใช้ในการหาค่าการกระจายอุณหภูมิโดยประมาณ สำหรับ สมการอนุพันธ์ย่อย สมการอนุพันธ์ย่อยถูกเปลี่ยนให้เป็น ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้นสำหรับจุดต่อต่างๆ ทั้งทั้ง โดเมน ขั้นตอนสำคัญของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์คือ การ กำหนดขนาดของโครงข่าย (mesh size) ในทิศทาง  $x$  และ  $y$  เพื่อใช้ในการกำหนด ตำแหน่งของจุดต่อสำหรับ ค่าตัวเลขของอุณหภูมิ ในที่นี้จะใช้โครงข่ายที่มีขนาด สม่ำเสมอ แต่ขนาดโครงข่ายในทิศทาง  $x$  และ  $y$  อาจไม่ เท่ากันก็ได้

สมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับ จุดต่อภายใน ที่เป็นไปตามวิธีผลต่างกลาง (central difference) จะให้ความแม่นยำสูง พิจารณาจุดต่อในรูปที่ 1 ค่าความ ลาดชันของอุณหภูมิในทิศทาง  $x$  สำหรับจุดต่อที่ ตำแหน่ง  $(x, y)$  สามารถประมาณค่าจากอุณหภูมิที่มีจุด ต่อรอบข้างตำแหน่ง  $(x + \Delta x, y)$ ,  $(x - \Delta x, y)$  อยู่ ห่างกัน  $2\Delta x$

$$\left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x,y} \cong \frac{T_{x+\Delta x,y} - T_{x-\Delta x,y}}{2\Delta x} \quad (5)$$

สัญลักษณ์กำกับล่างแสดงถึง ตำแหน่งของจุดต่อที่ พิจารณา ความลาดชันของอุณหภูมิในทิศทาง  $y$  ที่ ตำแหน่ง  $(x, y)$  สามารถประมาณค่าได้จากอุณหภูมิที่ จุดต่อรอบข้างตำแหน่ง  $(x, y + \Delta y)$ ,  $(x, y - \Delta y)$  ห่างกัน  $2\Delta y$  ดังนั้น

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{x,y} \cong \frac{T_{x,y+\Delta y} - T_{x,y-\Delta y}}{2\Delta y} \quad (6)$$

ค่าอนุพันธ์อันดับสองของอุณหภูมิที่จุดต่อ  $(x, y)$  ในทิศทาง  $x$  สามารถประมาณได้โดยอาศัยความลาดชันหรือค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่ตำแหน่ง  $(x + \Delta x / 2, y)$  และ  $(x - \Delta x / 2, y)$  คร่อมจุดต่อ  $(x, y)$  ด้วยระยะห่าง  $\Delta x$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{x,y} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\right)_{x,y} \\ &\cong \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2},y} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2},y}}{\Delta x} \\ &\cong \frac{T_{x-\Delta x,y} - 2T_{x,y} + T_{x+\Delta x,y}}{(\Delta x)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

ค่าอนุพันธ์อันดับสองของอุณหภูมิที่จุดต่อ  $(x, y)$  ในทิศทาง  $y$  สามารถแทนได้ด้วย

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{x,y} \cong \frac{T_{x,y-\Delta y} - 2T_{x,y} + T_{x,y+\Delta y}}{(\Delta y)^2} \quad (8)$$

แทนสมการที่ (7) และ (8) ลงในสมการที่ (1) ทำให้ได้สมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ สำหรับจุดต่อตำแหน่ง  $(x, y)$  ภายในโดเมนดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{T_{x-\Delta x,y} - 2T_{x,y} + T_{x+\Delta x,y}}{(\Delta x)^2} + \\ \frac{T_{x,y-\Delta y} - 2T_{x,y} + T_{x,y+\Delta y}}{(\Delta y)^2} + \frac{g_{x,y}}{k} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

ในกรณีที่ ขอบเขตโดเมนเอียงทำมุมกับแนวแกน  $x$  และ  $y$  จะทำให้สมการที่ (9) ไม่สามารถใช้

งานได้ ต่อไปจะกล่าวถึงสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับจุดต่อที่อยู่ใกล้กับขอบเขตเอียง [1] ดังรูปที่ 2

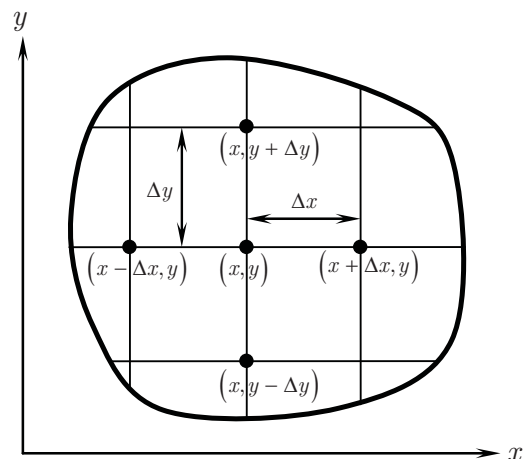
พิจารณารูปที่ 2(ก) ซึ่งโครงข่ายจุดต่อตามแนวแกน  $x$  ตัดกับขอบเขตเอียง อุณหภูมิที่จุด  $B$  สามารถประมาณค่าได้จาก

$$\begin{aligned} T_B \cong T_{N,j} + (\xi \Delta x) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{N,j} \\ + \frac{(\xi \Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{N,j} \end{aligned} \quad (10)$$

เมื่อ  $0 \leq \xi \leq 1$  ในขณะที่อุณหภูมิที่จุด  $(N-1, j)$  สามารถประมาณค่าได้จาก

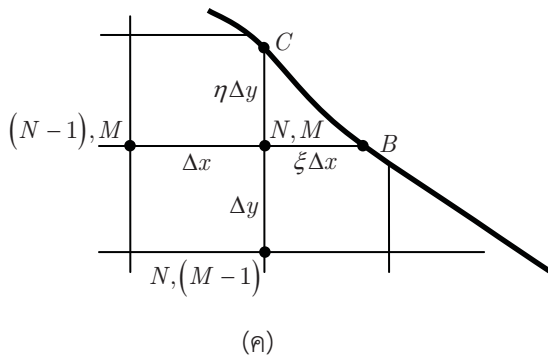
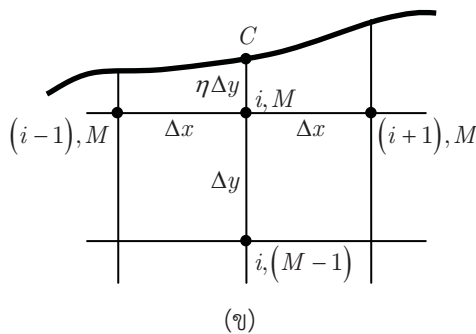
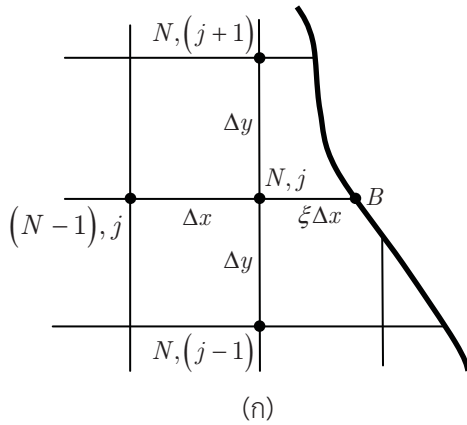
$$\begin{aligned} T_{N-1,j} \cong T_{N,j} - \Delta x \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{N,j} \\ + \frac{(\Delta x)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{N,j} \end{aligned} \quad (11)$$

หลังจากกำจัดตัวแปร  $(\partial T / \partial x)_{N,j}$  ออกไปจากสมการที่ (10) และ (11) ผลที่ได้คือ



รูปที่ 1 โครงข่ายของจุดต่อที่ตำแหน่ง  $(x, y)$  ภายในโดเมน

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{N,j} = \frac{2}{(\Delta x)^2} \cdot \left[ \frac{T_B}{\xi(1+\xi)} + \frac{T_{N-1,j}}{1+\xi} - \frac{T_{N,j}}{\xi} \right] \quad (12)$$



รูปที่ 2 จุดต่อที่อยู่บริเวณใกล้กับขอบเขตที่มีลักษณะเอียงทำมุมกับแกน  $x$  และ  $y$ : (ก) โครงข่ายจุดต่อตามแนวแกน  $x$  ตัดกับขอบเขตเอียง (ข) โครงข่ายจุดต่อตามแนวแกน  $y$  ตัดกับขอบเขตเอียง (ค) โครงข่ายตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตัดกับขอบเขตเอียง

ดังนั้นสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับจุดต่อในรูปที่ 2 (ก) เหมือนกับสมการที่ (9) ยกเว้นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ  $(\partial^2 T / \partial x^2)_{N,j}$

พิจารณารูปที่ 2(ข) ซึ่งโครงข่ายจุดต่อตามแนวแกน  $y$  ตัดกับขอบเขตเอียง อุณหภูมิที่จุด  $C$  สามารถประมาณค่าได้จาก

$$T_C \cong T_{i,M} + (\eta \Delta y) \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,M} + \frac{(\eta \Delta y)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,M} \quad (13)$$

เมื่อ  $0 \leq \eta \leq 1$  ในขณะที่อุณหภูมิที่จุด  $(i, M-1)$  สามารถประมาณค่าได้จาก

$$T_{i,M-1} \cong T_{i,M} - \Delta y \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{i,M} + \frac{(\Delta y)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,M} \quad (14)$$

หลังจากกำจัดตัวแปร  $(\partial T / \partial y)_{i,M}$  ออกไปจากสมการที่ (12) และ (13) ผลที่ได้คือ

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{i,M} = \frac{2}{(\Delta y)^2} \cdot \left[ \frac{T_C}{\eta(1+\eta)} + \frac{T_{i,M-1}}{1+\eta} - \frac{T_{i,M}}{\eta} \right] \quad (15)$$

ดังนั้นสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับจุดต่อในรูปที่ 2 (ข) เหมือนกับสมการที่ (9) ยกเว้นพจน์ที่เกี่ยวข้องกับ  $(\partial^2 T / \partial y^2)_{i,M}$

รูปที่ 2(ค) โครงข่ายจุดต่อตามแนวแกน  $x$  และ  $y$  ตัดกับขอบเขตเอียง จุด  $B$  และจุด  $C$  คือจุดที่อยู่บนขอบเขต ดังนั้นสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สำหรับจุด

ต่อ  $(N, M)$  สามารถหาได้จากสมการที่ (12) และ (15) ดังนี้

$$\begin{aligned} & \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[ \frac{T_B}{\xi(1+\xi)} + \frac{T_{N-1,M}}{1+\xi} - \frac{T_{N,M}}{\xi} \right] \\ & + \frac{2}{(\Delta y)^2} \left[ \frac{T_C}{\eta(1+\eta)} + \frac{T_{N,M-1}}{1+\eta} - \frac{T_{N,M}}{\eta} \right] \\ & + \frac{g_{N,M}}{k} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

ในกรณีที่  $\Delta x = \Delta y = h$  จะทำให้สมการที่ (16) มีรูปแบบที่ง่ายยิ่งขึ้น

$$\begin{aligned} & \frac{T_B}{\xi(1+\xi)} + \frac{T_{N-1,M}}{1+\xi} + \frac{T_C}{\eta(1+\eta)} + \frac{T_{N,M-1}}{1+\eta} \\ & - \left[ \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\eta} \right] T_{N,M} + \frac{g_{N,M}h^2}{2k} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

ต่อจากนั้น ค่าตอบเชิงตัวเลขได้มาจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยวิธีเกาส์ไซเดลแบบจุดต่อจุด การคำนวณสิ้นสุดเมื่อ

$$\sum_i \frac{|T_i^n - T_i^{n-1}|}{|T_i^n|} < 10^{-5} \quad (18)$$

เมื่อ  $i$  คือหมายเลขของจุดต่อและ  $n$  คือหมายเลขครั้งของการคำนวณซ้ำ ค่า tolerance  $10^{-5}$  ถูกใช้ในการยอมรับคำตอบว่าลู่เข้าหรือไม่ ถ้าต้องการใช้ค่า tolerance ที่น้อยกว่านี้ย่อมทำได้ แต่จะต้องใช้เวลาในการคำนวณที่ยาวนานขึ้น ค่านี้ไม่ได้อ้างอิงจากงานวิจัยใด

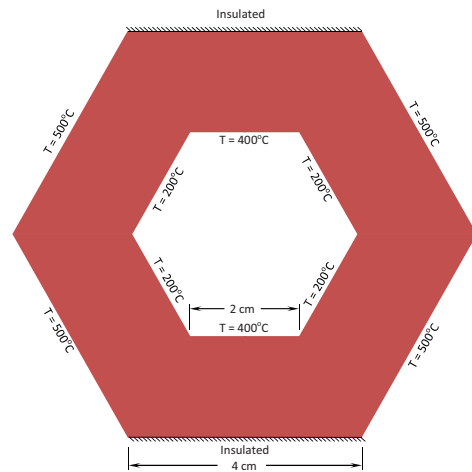
#### 4. ผลการคำนวณ

ปัญหาทั้งหมดที่ใช้ในการทดสอบคำตอบจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์มีทั้งหมด 3 ปัญหา ปัญหาที่ 4.1 และ 4.2 ไม่มีการผลิตความร้อนภายในของแข็ง ปัญหาที่ 4.3 มีการผลิตความร้อนต่อหนึ่งปริมาตรในอัตราคงที่

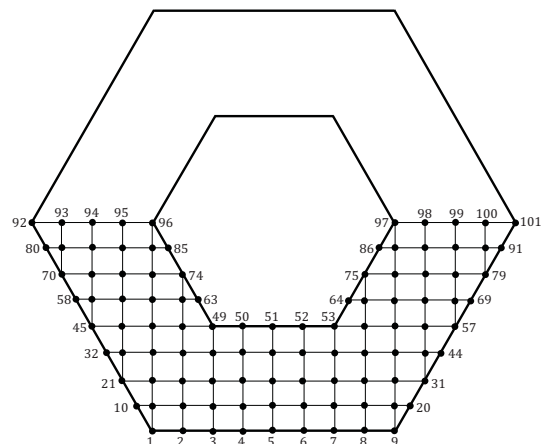
โปรแกรมที่ใช้แสดงการกระจายอุณหภูมิของทุกปัญหา คือ โปรแกรมสำเร็จรูปชื่อว่า Tecplot

#### 4.1 การกระจายอุณหภูมิในผนังรูปหกเหลี่ยมกลวง

ปัญหานี้นำมาจากหนังสือของ Versteeg and Malalasekera [2] ซึ่งแสดงให้เห็นตัวอย่างการคำนวณการนำความร้อนด้วยวิธีไฟไนต์วอลุ่ม สำหรับกริดไร้ระเบียบ (unstructured finite volume method) รูปร่าง ขนาดความยาวที่เกี่ยวข้อง และเงื่อนไขขอบเขตของปัญหาที่ 4.1 แสดงอยู่ในรูปที่ 3 ความสมมาตรของปัญหาที่ 4.1 ทำให้การคำนวณสามารถใช้เพียงหนึ่งในสองของรูปได้ โค้งข่ายของจุดต่อแสดงอยู่ในรูปที่ 4



รูปที่ 3 รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาที่ 4.1

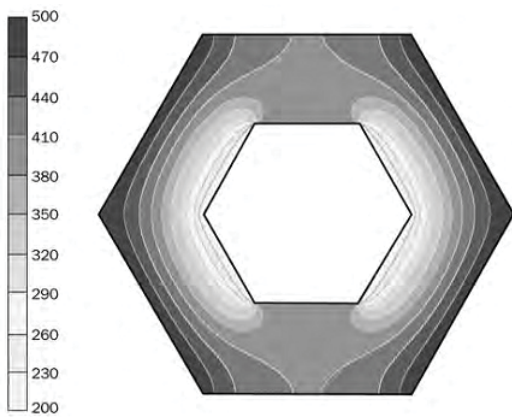


รูปที่ 4 กริดที่ใช้ในปัญหาที่ 4.1

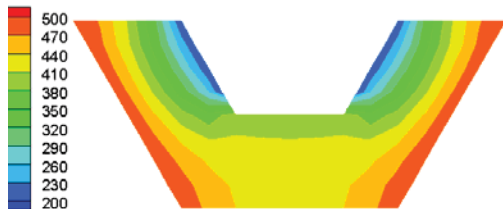
เงื่อนไขขอบเขตแบบอุณหภูมิคงที่ได้แก่  $500^\circ\text{C}$  สำหรับผิวด้านนอกของหกเหลี่ยมกลวง  $400^\circ\text{C}$  และ  $200^\circ\text{C}$  สำหรับผิวด้านในของหกเหลี่ยมกลวง ขอบเขต



ด้านที่เหลือทั้งหมด กำหนดให้เป็น adiabatic wall (ไม่มีฟลักซ์ความร้อนไหลผ่านขอบเขตได้) ผนังหกเหลี่ยมไม่มีการผลิตความร้อน อุณหภูมิที่คำนวณได้จากวิธีไฟไนต์วอลุ่มและวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ ถูกนำมาแสดงไว้ในรูปที่ 5(ก) และ 5(ข) ตามลำดับ จำนวนจุดต่อของวิธีไฟไนต์วอลุ่มในเอกสาร [2] ไม่ได้ถูกระบุว่ามีจำนวนเท่าใดเพียงแต่ระบุว่า เป็นกริดที่มีความละเอียดมาก ดังนั้นจึงใช้เป็นข้อมูลอ้างอิงในบทความนี้ จำนวนจุดต่อของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ คือ 101 จุดต่อ รูปที่ 5(ก) และ 5(ข) แสดงให้เห็นถึงความใกล้เคียงของอุณหภูมิจากทั้งสองวิธี



(ก)



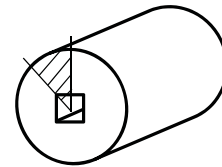
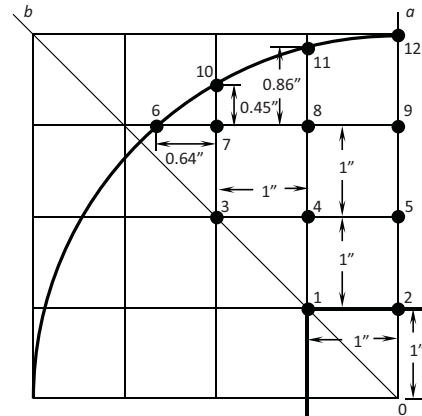
(ข)

รูปที่ 5 การกระจายอุณหภูมิภายในผนังหกเหลี่ยม (ก) คำตอบของวิธีไฟไนต์วอลุ่มไร้ระเบียบ [1] (ข) คำตอบของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (หนึ่งในสองของรูปร่างจริง)

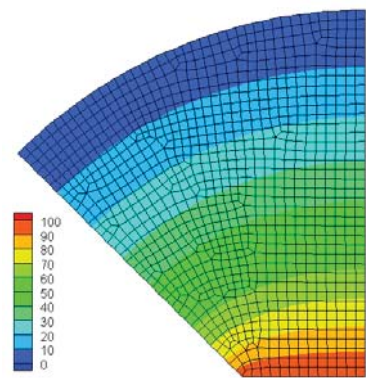
## 4.2 การกระจายอุณหภูมิในเพลากลมที่มีรูเจาะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ปัญหานี้มาจากหนังสือของ Chapman [3] ซึ่งหาการกระจายอุณหภูมิด้วย ความต้านทานเชิงความร้อน (thermal resistance) ซึ่งเป็นพื้นฐานเดียวกับกับวิธีไฟไนต์วอลุ่ม รูปร่างปัญหาและเงื่อนไขขอบเขตเป็นไปตามรูปที่ 6 เพลากลมขนาดเส้นผ่าศูนย์กลาง 8 นิ้ว มี

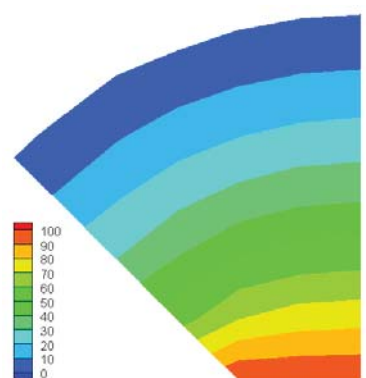
รูเจาะรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 2 นิ้วตรงกลางเพลลา ผิวของรูเจาะมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ  $100^{\circ}\text{F}$  ผิวด้านนอกของเพลลา



รูปที่ 6 กริดตัวอย่างสำหรับปัญหาที่ 4.2



(ก)



(ข)

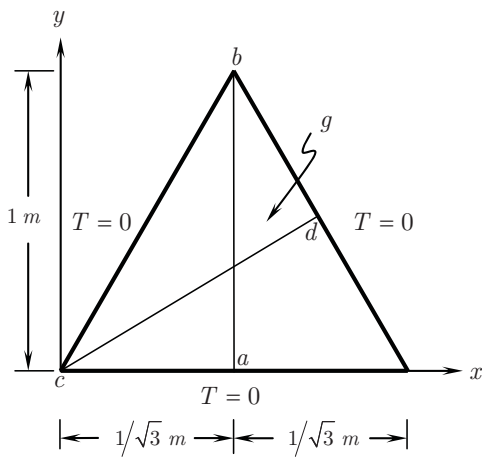
รูปที่ 7 การกระจายอุณหภูมิสำหรับปัญหาที่ 4.2 (ก) วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (1078 จุดต่อ) (ข) วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (34 จุดต่อ)

มีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ  $0^\circ\text{F}$  ปัญหานี้มีความสมมาตรจึงคิดเพียงหนึ่งในแปดของรูป ขอบเขตสมมาตรจะกำหนดให้ไม่มีฟลักซ์ความร้อนไหลผ่าน (เส้นตรง  $o-a$  และ  $o-b$ ) และไม่มีการผลิตความร้อนภายในเพลลา การกระจายอุณหภูมิจากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ และวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์แสดงอยู่ในรูปที่ 7(ก) และ 7(ข) ตามลำดับ

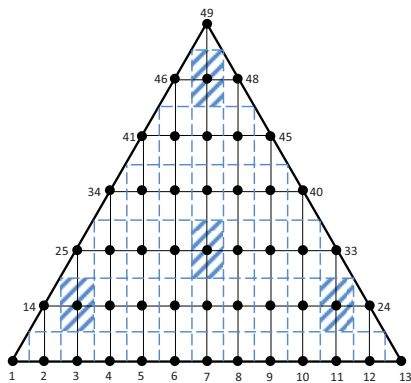
### 4.3 การกระจายอุณหภูมิในสามเหลี่ยมซึ่งมีอัตราการผลิตความร้อนคงที่

รูปที่ 8 แสดงรูปร่าง ขนาดและเงื่อนไขขอบเขตของ ปัญหาที่ 4.3 ความสูงของสามเหลี่ยมเท่ากับ 1 เมตร อุณหภูมิผิวบนอกทั้งสามด้านของสามเหลี่ยมคือ  $0^\circ\text{C}$  อัตราการผลิตความร้อนอย่างสม่ำเสมอทั่วทั้งสามเหลี่ยม ( $g$ ) เท่ากับ  $10^4 \text{ W/m}^3$  สภาพการนำความร้อนของสามเหลี่ยม ( $k$ ) คือ  $1 \text{ W/(m}\cdot^\circ\text{C)}$  คำตอบแม่นยำตรง [4] สำหรับปัญหานี้คือ

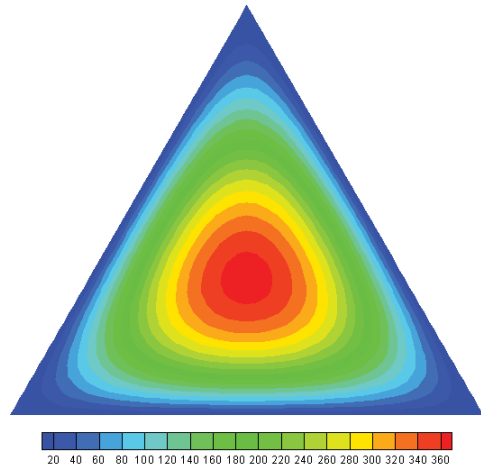
$$T = \frac{g}{2k} (y - 2 + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)y \quad (19)$$



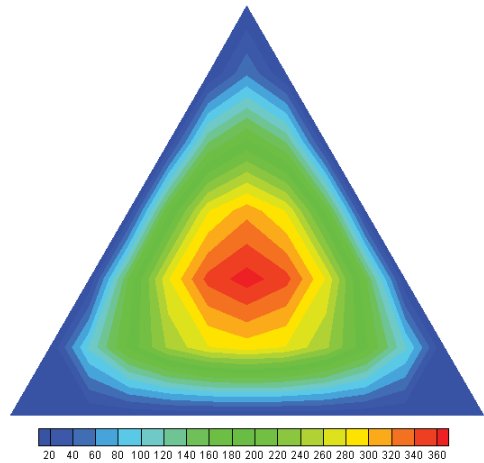
รูปที่ 8 รูปร่างและเงื่อนไขขอบเขตสำหรับปัญหาที่ 4.3



รูปที่ 9 กริดที่ใช้ในปัญหาที่ 4.3 พื้นที่แรเงาแสดงบริเวณของการผลิตความร้อนสำหรับจุดต่อบางตำแหน่ง

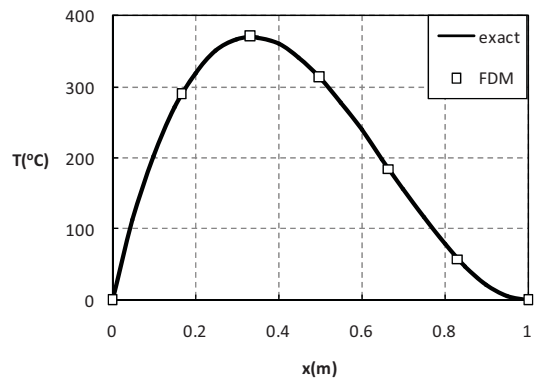


(ก)

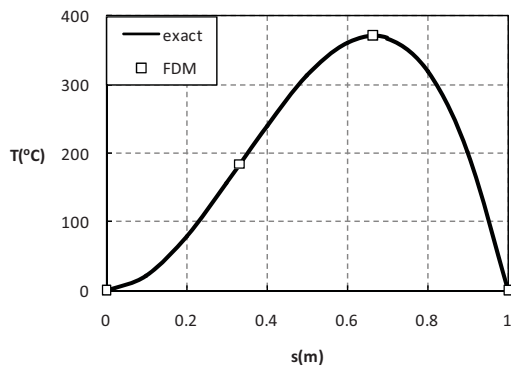


(ข)

รูปที่ 10 การกระจายอุณหภูมิในสามเหลี่ยม (ก) คำตอบเชิงวิเคราะห์ (ข) คำตอบจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (49 จุดต่อ)



รูปที่ 11 รูปร่างอุณหภูมิที่หน้าตัด  $x = 1/\sqrt{3} \text{ m}$  หรือแนวเส้นตรง  $a - b$  ของปัญหาที่ 4.3



รูปที่ 12 รูปร่างอุณหภูมิตามแนวเส้นตรง  $c - d$  ของปัญหาที่ 4.3 โดย  $s$  คือระยะทางที่วัดออกจากจุดกำเนิดตามแนว  $c - d$

รูปที่ 10 แสดงภาพสนามอุณหภูมิโดยรวมของคำตอบเชิงวิเคราะห์และคำตอบจากวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ เห็นได้ชัดว่ามีความแตกต่างของคำตอบทั้งสอง แสดงให้เห็นบริเวณใกล้กับมุมทั้งสามของสามเหลี่ยม และบริเวณที่มีความลาดชันของอุณหภูมิสูง เนื่องจากระยะห่างของโครงข่ายจุดต่อมากเกินไป หากเปรียบเทียบอุณหภูมิที่จุดต่างๆ บนหน้าตัด  $x = 1/\sqrt{3} m$  และแนวเส้นตรง  $c - d$  ของสามเหลี่ยมจะพบว่าคำตอบทั้งสองมีค่าใกล้เคียงกันดังรูปที่ 11 และ 12 ตามลำดับ

## 5. สรุป

การกระจายอุณหภูมิสองมิติที่สภาวะคงตัวภายในของแข็งซึ่งอยู่ภายใต้การให้ความร้อนสามารถทำนายได้ดีด้วยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ แม้ว่ารูปร่างของแข็งจะไม่ใช้รูปร่างอย่างง่าย บทความนี้แสดงการสร้างสมการไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ สำหรับจุดต่อต่างๆ ซึ่งเกิดจากการตัดกันของแนวเส้นกริดในทิศทาง  $x$  และ  $y$  รวมถึงการตัดกันของแนวเส้นกริดในทิศทางต่างๆ กับขอบเขตรูปร่างของปัญหา คำตอบของระบบสมการได้มาจากการใช้วิธีเกาส์ไฮเดิล ผลการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์มีความใกล้เคียงกับผลการคำนวณจากวิธีอื่นเป็นอย่างดี

การปรับปรุงความสามารถของวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ในส่วนของการคำนวณและเงื่อนไขขอบเขตอาจทำได้ด้วยการแก้ปัญหาการนำความร้อนด้วยเงื่อนไขพลาซซ์ความร้อนคงที่ และเงื่อนไขการพาความร้อน การแก้ปัญหาที่อยู่ในสภาวะไม่คงตัว (unsteady state) นอกจากนี้อาจประยุกต์วิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์กับปัญหาด้านวิศวกรรม

เครื่องกลและวิศวกรรมด้านอื่นๆ ได้เช่น กลศาสตร์ของไหล และกลศาสตร์ของแข็ง เป็นต้น ในส่วนของการประดิษฐ์เป็นโปรแกรมเฉพาะงานยังมีอีกหลายอย่างที่ต้องปรับปรุงได้แก่ การเพิ่มความสะดวกในนำเข้าข้อมูลรูปร่างของโดเมนจากผู้ใช้รวมถึงการสร้างจุดต่ออัตโนมัติเพื่อรองรับการคำนวณที่ต้องใช้จุดต่อจำนวนมาก และรูปร่างของปัญหาที่ความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

## 6. เอกสารอ้างอิง

- [1] M.N. Ozisik, Boundary Value Problems in Heat Conduction, Dover, 2002.
- [2] H.K. Versteeg and W. Malalasekera, An Introduction to Computational Fluid Dynamics, The Finite Volume Method, 2nd edition, Pearson Education Limited, 2007.
- [3] A.J.Chapman, Fundamentals of Heat Transfer, 4th edition, Prentice Hall, 1984.
- [4] ปราโมทย์ เดชะอำไพ, ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. พิมพ์ครั้งที่ 4. 2550, กรุงเทพมหานคร: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- [5] C.A. Brebbia and J. Dominguez, Boundary Elements: An Introduction Course, 2nd edition, WIT Press, 1992.